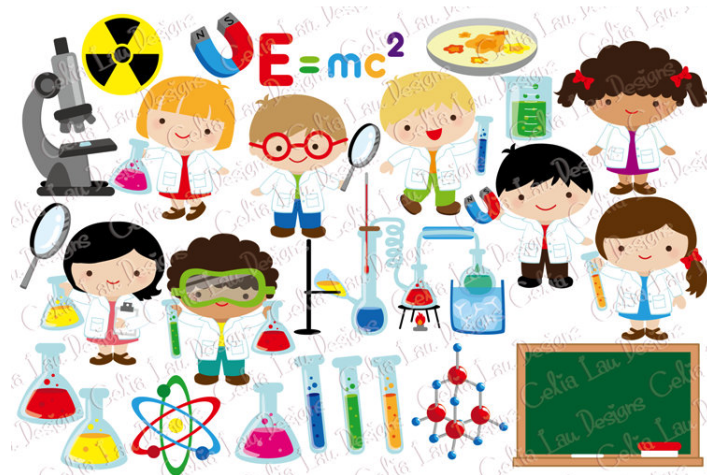


A volte ritornano (*II Edizione - 2016/2017*)



I problemi variazionali in Natura

-parte I-

A cura di Daniele Dimonte e Emanuela Laura Giacomelli

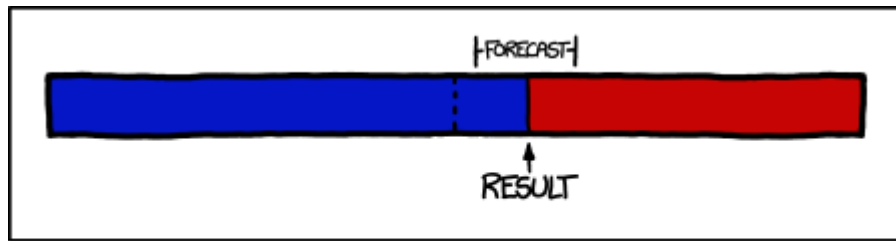
Sapienza Università di Roma

28 Aprile 2017

Liceo Scientifico Statale P. Ruffini



Liceo Scientifico Statale
"Paolo Ruffini"



BREAKING: TO SURPRISE OF PUNDITS, NUMBERS CONTINUE TO BE BEST SYSTEM FOR DETERMINING WHICH OF TWO THINGS IS LARGER.

Affrontare un problema che riguardi la posizione, la velocità e in generale l'interazione di corpi richiede solitamente un formalismo matematico. Per fare questo qualche secolo fa questo formalismo è stato reso rigoroso e grazie al lavoro di vari scienziati oggi siamo in grado di affrontare perfettamente problemi che senza il formalismo matematico ci risulterebbero quantomeno complessi.

Affrontiamo dunque alcuni di questi problemi cercando in particolare di far emergere la natura matematica sottostante e cercando di capire come il nostro formalismo ci possa tornare utile.

1.1 Il problema

Supponiamo di lasciar pendere una corda da due punti A e B . Qual'è la forma che essa assume? Rispondere a questa domanda richiede che noi siamo in grado di porre il problema in termini matematici.

Prima di tutto come si può descrivere la forma di una corda? Dato il tipo di problema che consideriamo possiamo pensare che la corda giaccia in realtà in un piano e non in tutto lo spazio. In tal caso allora una corda non è altro che una **curva** nel piano, cioè una funzione

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

che supporremo per il momento essere continua e derivabile.

1.1.1 Lunghezza infinitesima

Come si misura la lunghezza di una corda, una volta che siamo riusciti a descriverla come una curva?

Se consideriamo due punti sulla curva $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$, la distanza fra questi è

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = \sqrt{(\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 + (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2}.$$

Se i punti sulla curva sono molto vicini, la lunghezza della porzione di corda fra i due punti è ben approssimata da questa lunghezza. Allora pensiamo a una **partizione** dell'intervallo $[0, 1]$ nella forma

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1.$$

Se immaginiamo che N vada a infinito, la lunghezza degli intervalli della partizione diventerà sempre più piccola, e per piccole porzioni di corda possiamo usare l'approssimazione data dalla retta. Usando questa approssimazione otteniamo

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sum_{j=1}^N L(\gamma, t_{j-1}, t_j) \simeq \sum_{j=1}^N |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \\ &= \sum_{j=1}^N |t_j - t_{j-1}| \frac{|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|}{|t_j - t_{j-1}|} \simeq \int_0^1 dt |\dot{\gamma}(t)| \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la notazione fisica (sic!) che indica le derivate con un punto sopra la funzione.

Abbiamo già detto di come la corda sia possibile immaginarla come una funzione nello spazio, ma in realtà riflettendoci bene possiamo renderci conto che addirittura essa può essere scritta come una funzione **nel piano**. A meno di riscalarle le dimensioni¹ potremo scrivere dunque

$$\gamma(t) = (t, q(t))$$

e di conseguenza

$$L(\gamma) = \int_0^1 dt \sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2}.$$

Il valore $\sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2}$ rappresenta la **lunghezza infinitesima** della corda e ricoprirà un ruolo importante in seguito.

1.1.2 La Lagrangiana

Ricordiamo dalla PARTE I con Emanuela che la lagrangiana $\mathcal{L}$ è data dalla differenza fra l'energia cinetica T meno l'energia potenziale V .

Dato che cerchiamo posizioni di equilibrio possiamo supporre che l'energia cinetica sia nulla, dunque

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = -V(q, \dot{q}, t).$$

L'unica forza esterna che agisce sulla corda è la forza di gravità, perciò l'unico termine dell'energia potenziale è dato dall'energia potenziale gravitazionale che corrisponde al prodotto fra la massa, la costante g e l'altezza del punto. Dato che la massa è costante lungo la corda essa può essere scritta come

$$m = \rho L(\gamma)$$

dove ρ è la densità di massa, costante lungo la corda.

Usando la densità scriviamo allora l'energia potenziale in un punto della curva γ come

$$\begin{aligned} V(q, \dot{q}, t) &\simeq \rho \text{ "lunghezza infinitesima" } g \text{ "altezza del punto" } = \\ &= \rho \sqrt{1 + \dot{q}^2} g q. \end{aligned}$$

¹Cioè di riscalarle le lunghezze fino ad avere che il punto A abbia ascissa 0 e il punto B abbia ascissa 1 e dunque che i punti A e B si possano scrivere come $(0, A)$ e $(1, B)$.

A questo punto possiamo scrivere la lagrangiana che assume la forma

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = -\rho g q \sqrt{1 + \dot{q}^2}$$

e dunque il **funzionale d'azione** (introdotto anch'esso da Emanuela durante la PARTE I) si scrive come

$$\mathcal{S}[\gamma] \equiv \mathcal{S}[q] = \int_0^1 dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) = -\rho g \int_0^1 dt q(t) \sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2}.$$

1.1.3 Il problema variazionale

Dalla teoria sviluppata in precedenza sappiamo ora che la forma della corda è ottenuta minimizzando il seguente problema:

$$\inf_{\gamma \text{ t.c. } L(\gamma)=L} \mathcal{S}[\gamma]$$

dove abbiamo minimizzato su tutte le curve (continue e derivabili) di lunghezza fissata pari a L .

1.2 La soluzione

Nella parte precedente abbiamo imparato che la soluzione del problema di minimizzazione così come lo abbiamo introdotto si può ottenere, grazie al **Principio di Minima Azione** risolvendo la seguente **Equazione di Eulero-Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t).$$

La risoluzione di un'equazione di questo tipo può essere un problema veramente complicato da risolvere; fortunatamente esistono dei trucchi che non valgono in completa generalità ma che fanno al caso nostro.

In questo caso, ad esempio, una semplificazione si ottiene facilmente considerando il fatto che *la nostra lagrangiana non dipende dal tempo*. Questo infatti fa sì che sia valida la seguente Proposizione.

Proposizione 1.2.1 (Identità di Beltrami). *Sia $\mathcal{L}$ una Lagrangiana non dipendente dal tempo.*

Se q soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange di $\mathcal{L}$ allora esiste una costante E tale che q soddisfi anche la seguente equazione

$$\dot{q}(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) + E.$$

In più, se lo spazio delle coordinate generalizzate è di dimensione 1, allora una soluzione dell'identità di Beltrami è anche soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Dimostrazione. Sia q soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Allora

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{d}{dt} \dot{q}(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t).$$

Dato che q risolve le equazioni di Eulero-Lagrange abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \frac{d}{dt}\dot{q}(t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \right] \dot{q}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) \right].\end{aligned}$$

Ora sappiamo che due funzioni che hanno la stessa derivata differiscono per una costante; chiamiamo questa costante $-E$ per ottenere il risultato.

Viceversa, sia ora q che risolve l'identità di Beltrami. Allora, dato che $\dot{q}$ è uno scalare possiamo riscrivere l'identità come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{\dot{q}(t)} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{E}{\dot{q}(t)}.$$

Se ora deriviamo rispetto al tempo otteniamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{1}{\dot{q}(t)} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\ddot{q}(t)}{\dot{q}(t)^2} (\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) + E) = \\ &= \frac{1}{\dot{q}(t)} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \ddot{q}(t) \right] - \frac{\ddot{q}(t)}{\dot{q}(t)^2} (\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) + E) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) + \frac{\ddot{q}(t)}{\dot{q}(t)^2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) - \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) - E \right] = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t)\end{aligned}$$

□

Osservazione. Notiamo che in generale la costante E è in realtà l'**energia del sistema**, e che quindi l'identità di Beltrami ci dice che l'energia del sistema si conserva.

Nel nostro caso considerando la derivata $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = -\rho g \frac{q\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}$$

e dunque cerchiamo la soluzione dell'identità di Beltrami che in questo caso si scrive come

$$\begin{aligned}-\rho g \frac{q(t)(\dot{q}(t))^2}{\sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2}} &= -\rho g q(t) \sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2} + E \\ \frac{q(t)}{\sqrt{1 + (\dot{q}(t))^2}} &= \frac{E}{\rho g}.\end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione differenziale può essere calcolata ed è data esplicitamente da

$$q(t) = A \cosh \left(\frac{\rho g t}{E} \right) + \sqrt{A^2 - \frac{E^2}{\rho^2 g^2}} \sinh \left(\frac{\rho g t}{E} \right),$$

dove A e E sono parametri che dipenderanno soltanto dai punti A e B .

2.1 Il problema

Supponiamo di avere due punti A e B posti il primo più in alto del secondo e di voler costruire un percorso per una pallina di massa m tale che lasciata rotolare da A impieghi il minimo tempo possibile per arrivare al punto B . Quel'è la forma che deve avere il percorso? La risposta che ci sorge spontanea sarebbe che la forma sia di un percorso in linea retta, ma in realtà questo non è il percorso più efficiente; usiamo la matematica per **dimostrarlo**!

2.1.1 Tempo infinitesimo

Così come nel problema precedente per descrivere il problema converrà considerare una curva nel piano γ . Per prima cosa ci chiediamo quanto sia il tempo che ci mette la nostra pallina a percorrere un tratto infinitesimo di γ . Come prima pensiamo ad una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ data da

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

e consideriamo il tempo necessario a percorrere il tratto x_{i-1}, x_i ; questo, se il tratto sarà abbastanza piccolo (corrispondente a N molto grande) sarà dato dal rapporto fra la lunghezza del tratto e la velocità, cioè

$$T(x_i, x_{i-1}) \simeq \frac{|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|}{v(x_i)}.$$

Usiamo ora la conservazione dell'energia per ricavare una formula per la velocità in termini della posizione. In questo caso converrà porre l'origine nel punto A e l'asse delle ordinate diretto verso il basso. Converrà inoltre riscalarle le lunghezze in modo tale che l'ascissa di B sia pari a 1.

Allora le posizioni di A e B saranno espresse in queste coordinate come $A = (0, 0)$ e $B = (1, h)$ con h una quantità *positiva* (questo è legato al fatto che l'asse delle ordinate è diretto verso il basso). Inoltre, possiamo supporre come sopra che la curva in realtà sia una funzione, cioè che $\gamma(x) = (x, y(x))$. In questo caso abbiamo che l'energia cinetica T e l'energia potenziale V nella posizione corrispondente a x_i sono scrivibili come

$$T(x_i) = \frac{1}{2}m(v(x_i))^2, \quad V(x_i) = -mgy(x_i)$$

dove il segno in V è legato al verso dell'asse delle ordinate; dalla conservazione dell'energia abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 = T(0) + V(0) &= T(x_i) + V(x_i) = \frac{1}{2}m (v(x_i))^2 - mgy(x_i) \\ \Rightarrow v(x_i) &= \sqrt{2g y(x_i)} \end{aligned}$$

Osservazione. Si noti che in questo caso non considereremo la lagrangiana meccanica, in quanto non vogliamo minimizzare l'azione ma il tempo. Questo fa sì che la nostra lagrangiana invece di essere composta come energia cinetica meno energia potenziale sarà data soltanto dal tempo di percorrenza.

A questo punto andiamo a riscrivere il tempo infinitesimo e otteniamo

$$T(x_i, x_{i-1}) \simeq \frac{|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|}{v(x_i)} = \frac{|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|}{\sqrt{2g y(x_i)}}.$$

2.1.2 La Lagrangiana

Scriviamo ora il tempo di percorrenza totale come la somma delle sue parti infinitesime per ottenere

$$\begin{aligned} T[\gamma] &= \sum_{i=1}^N T(x_i, x_{i-1}) \simeq \sum_{i=1}^N \frac{|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|}{\sqrt{2g y(x_i)}} = \\ &= \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| \frac{|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|}{|x_i - x_{i-1}|} \frac{1}{\sqrt{2g y(x_i)}} \simeq \\ &\simeq \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| \frac{|\dot{\gamma}(x_i)|}{\sqrt{2g y(x_i)}} = \sum_{i=1}^N |x_i - x_{i-1}| \sqrt{\frac{1 + (\dot{y}(x_i))^2}{2g y(x_i)}} \simeq \\ &\simeq \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1 + (\dot{y}(x))^2}{2g y(x)}}. \end{aligned}$$

In questo caso il ruolo dell'azione è giocato dal tempo $T[\gamma]$, dunque la lagrangiana che consideriamo è

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}, t) = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2g y}}.$$

2.1.3 Il problema variazionale

Dato che la questione alla quale vogliamo rispondere è quale sia il percorso con il tempo di percorrenza più breve, il problema di minimizzazione che vogliamo considerare è il seguente:

$$\inf_{\gamma} T[\gamma]$$

dove abbiamo minimizzato su tutte le curve continue e derivabili.

2.2 La soluzione

Dato che anche stavolta la lagrangiana che consideriamo non dipende dal tempo possiamo procedere come con la catenaria e fare uso dell'identità di Beltrami. Derivando la lagrangiana otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}) = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2g y (1 + \dot{y}^2)}}.$$

L'identità di Beltrami si scrive allora come

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{y}(x))^2}{\sqrt{2g y(x) (1 + (\dot{y}(x))^2)}} &= \sqrt{\frac{1 + (\dot{y}(x))^2}{2g y(x)}} + E \\ \frac{1}{\sqrt{2g y(x) (1 + (\dot{y}(x))^2)}} &= -E. \end{aligned}$$

Non ci facciamo ingannare dal segno! Sebbene ci sia un meno di fronte alla E , noi sappiamo solo che E è una costante, che in questo caso dovrà ad esempio essere negativa.

Elevando entrambi i membri al quadrato otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) (1 + (\dot{y}(x))^2) &= \frac{1}{2gE^2} \\ (\dot{y}(x))^2 &= \frac{1}{2gE^2 y(x)} - 1. \end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione differenziale può di nuovo essere calcolata esplicitamente e scritta in forma parametrica è della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4gE^2} (t - \sin t), \\ y(t) &= \frac{1}{4gE^2} (1 - \cos t) \end{aligned}$$

dove nuovamente il parametro E dipende solo dal dato iniziale.

3.1 Il problema

Supponiamo ora di voler studiare il moto di una pallina di massa m attaccata ad un asse di lunghezza l e peso trascurabile lasciata oscillare e di voler mostrare che oscilla in modo periodico. La variabile che vogliamo considerare per studiare il moto del pendolo è l'angolo che si forma con l'asse verticale θ . Allora l'energia cinetica sarà data da

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Se immaginiamo il vettore della velocità della pallina, esso si può sempre decomporre lungo due componenti, una tangenziale al moto della pallina e una perpendicolare. In particolare la componente tangenziale della velocità si può identificare come la lunghezza della corda moltiplicata per la velocità angolare della pallina¹. Dato però che la pallina non si muove dal percorso identificato dalla corda che la tiene sospesa sappiamo che la componente perpendicolare è in realtà nulla, dunque abbiamo che

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Fissando il sistema di riferimento come centrato nel punto più basso raggiunto dalla pallina abbiamo che l'altezza della pallina è

$$h = l(1 - \cos \theta).$$

Infine dato che l'energia potenziale è quella gravitazionale abbiamo che

$$V = mgh = mgl(1 - \cos \theta)$$

3.1.1 La Lagrangiana

Dalla forma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale deduciamo che la lagrangiana si scriva come

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

¹Ricordiamo che se la velocità si identifica come frazione della distanza percorsa sul tempo di percorrenza, così la velocità angolare si identifica come rapporto fra angolo percorso su tempo di percorrenza. Da questo e dalla relazione che sussiste fra la lunghezza di una corda in una circonferenza e l'ampiezza di un angolo in radianti si deduce che la velocità angolare e la velocità tangenziale si ottengono l'una dall'altra dividendo e moltiplicando rispettivamente per la lunghezza del raggio della circonferenza.

3.1.2 Il problema variazionale

Il moto della pallina fra due tempi t_1 e t_2 può essere allora determinato studiando il problema variazionale associato alla minimizzazione dell'azione del sistema; cerchiamo cioè

$$\inf_{\theta} \mathcal{S}[\theta]$$

dove la minimizzazione avviene su tutte le traiettorie $\theta : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e dove l'azione è definita ancora una volta come

$$\mathcal{S}[\theta] = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\theta(t), \dot{\theta}(t), t).$$

3.2 La soluzione

Dato che ancora una volta la lagrangiana non dipende dal tempo applichiamo l'identità di Beltrami.

Consideriamo allora la seguente derivata:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}(\theta, \dot{\theta}) = ml^2 \dot{\theta}.$$

Esiste una costante E tale che

$$\begin{aligned} ml^2 \left(\dot{\theta}(t) \right)^2 &= \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\theta}(t) \right)^2 - mgl(1 - \cos \theta) + E \\ E &= \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\theta}(t) \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Osservando nuovamente questa uguaglianza notiamo che quanto già detto in precedenza qui appare chiaramente, cioè che l'identità di Beltrami per una lagrangiana costruita a partire dall'energia cinetica e dall'energia potenziale ci dice che **l'energia si conserva**. Infatti notiamo che la formula ci dice che le due componenti dell'energia (potenziale e cinetica) si sommano a formare una quantità E che però non dipende dal tempo.

Sebbene in questo caso la soluzione non si possa rendere esplicita in maniera banale l'unica cosa che facciamo è riscriverla come

$$|\dot{\theta}(t)| = \sqrt{\frac{2}{ml^2} (E - mgl(1 - \cos \theta))}.$$

Reductio ad absurdum is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.

G. H. Hardy