FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Vortici Giganti in Condensati di Bose-Einstein in rotazione

Relatori:
Gianluca Panati
Michele Correggi

Studente:
Daniele Dimonte
n° matricola 1556925

Anno Accademico 2013-2014

Introduzione

In questa tesi abbiamo studiato il comportamento di un condensato di Bose-Einstein intrappolato e posto in rotazione. L'osservazione della risposta alla rotazione è infatti il metodo tipico di verificare la superfluidità di sistemi fisici quali i condensati di Bose-Einstein. A differenza di un fluido classico, infatti, l'unico possibile effetto della rotazione in un superfluido è la generazione di vortici quantizzati.

Lo studio della nucleazione dei vortici nel condensato e in generale le varie transizioni di fase alle quali esso va incontro sono studiate da un punto di vista matematico tramite la minimizzazione di un funzionale di singola particella, detto funzionale di Gross-Pitaevskii. Abbiamo allora considerato il problema variazionale ad esso associato, e in particolare l'asintotica dell'energia e dello stato del sistema per $\varepsilon \to 0$, con $\frac{1}{\varepsilon^2}$ coefficiente del termine nonlineare nel funzionale.

È noto in letteratura che vi sono tre diverse transizioni di fase relative alla forma del condensato associate a tre velocità critiche di rotazione. In particolare la prima transizione avviene con la nucleazione del primo vortice, la seconda con la formazione di una depressione nella densità del condensato in corrispondenza dell'origine, e la terza con la transizione ad uno stato di "vortice gigante".

La terza transizione è quella su cui si è concentrato il nostro lavoro: la velocità critica ad essa associata viene raggiunta quando Ω è prossimo ad un valore critico $\frac{\Omega_0}{\varepsilon^4}$. In questo regime di velocità il condensato è sostanzialmente confinato in una corona circolare. Per velocità al di sotto del valore critico, all'interno della corona circolare i vortici sono uniformemente distribuiti, mentre, superata quella soglia, la corona appare priva di vortici. L'assenza di vortici fa sì che l'energia dello stato fondamentale sia prossima a quella di una funzione a simmetria radiale con un vortice unico collocato nell'origine (vortice gigante).

Il fatto che la funzione d'onda del condensato abbia a grandi linee questa forma era noto ben al di sopra della velocità critica; il nostro studio invece si è focalizzato sulla derivazione di una stima precisa per l'energia al fine di poter identificare esattamente la velocità di transizione allo stato di vortice gigante. Per fare questo abbiamo usato un funzionale energetico opportuno ottenuto testando l'energia di Gross-Pitaevskii su stati di vortice gigante con fase complessiva ignota e successivamente minimizzando rispetto a tale fase. Questo processo ci ha permesso di ottenere una stima per la fase ottimale dello stato, e una associata stima dall'alto per il minimo dell'energia di Gross-Pitaevskii. In particolare abbiamo dimostrato che in prima approssimazione la fase ottimale è uguale alla velocità angolare del condensato $\frac{\Omega_0}{\varepsilon^4}$ più una correzione non banale di ordine 1. Abbiamo infatti ricavato l'espressione esplicita di questa correzione e mostrato che per Ω_0 al di sopra di un certo valore essa ha segno definito (negativo). A tale scopo abbiamo introdotto un funzionale effettivo ε-indipendente la cui energia approssima quella del funzionale di vortice gigante e dimostrato stime in norma L^p (con $p = \infty$ compreso) sulla differenza fra i relativi minimizzatori.

I principali strumenti matematici utilizzati spaziano dalla teoria standard del calcolo variazionale alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali; più nel dettaglio si sono sfruttate tecniche analitiche per lo studio di equazioni differenziali di tipo ellittico (principio del massimo, metodo delle sopra e sottosoluzioni, stime di Sobolev, etc.), elementi di teoria degli operatori di Schrödinger e strumenti di analisi asintotica.

Il materiale della tesi è organizzato in capitoli. Nel Capitolo 1 è introdotto il contesto fisico e discussi i fenomeni chiave: condensazione di Bose-Einstein e superfluidità. Nel Capitolo 2 viene quindi definita la teoria di Gross-Pitaevskii per condensati in rotazione e discussi i principali aspetti matematici. Più precisamente si riassume il comportamento asintotico quando $\varepsilon \to 0$ dell'energia di Gross-Pitaevskii e dei relativi minimizzatori, con particolare attenzione alle transizioni di fase e relative velocità critiche. Nel Capitolo 3 ci si è concentrati maggiormente sul regime di rotazione molto rapida, ovvero per velocità angolari dell'ordine della terza velocità critica. Il problema matematico trattato nella tesi è qui formulato nel dettaglio. Il Capitolo 4 è dedicato all'esposizione dei risultati originali di questa tesi, e a commenti su possibili prospettive future. Le dimostrazioni sono quindi contenute nel Capitolo 5.

Notazione

Nel corso del testo molto spesso sono stati utilizzati termini di confronto asintotico; spieghiamo brevemente la notazione usata.

Supponiamo f_ε e g_ε delle quantità reali positive dipendenti da un parametro ε. Indicheremo:

$$\begin{array}{rcl}
f_\varepsilon \gg g_\varepsilon & se & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon}{g_\varepsilon} = +\infty \\
f_\varepsilon \ll g_\varepsilon & se & g_\varepsilon \gg f_\varepsilon \\
f_\varepsilon \sim g_\varepsilon & se & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon}{g_\varepsilon} = c, \ \text{con } 0 < c < +\infty \\
f_\varepsilon \lesssim g_\varepsilon & se & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon}{g_\varepsilon} = c \text{ con } 0 < c \leq 1 \\
f_\varepsilon \gtrsim g_\varepsilon & se & g_\varepsilon \lesssim f_\varepsilon.
\end{array}$$

mentre se sono scelte non necessariamente positive, scriveremo:

$$f_\varepsilon = \mathcal{O}(g_\varepsilon) \iff \text{esiste } C > 0 : \ |f_\varepsilon| \leq C|g_\varepsilon|$$

$$f_\varepsilon = o(g_\varepsilon) \iff \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_\varepsilon}{g_\varepsilon} = 0,$$

e in particolare definiremo

$$\mathcal{O}(\varepsilon^\infty) := \bigcap_{a\in\mathbb{R}^+} \mathcal{O}(\varepsilon^a).$$

Indice

CAPITOLO 1

Fenomenologia dei Condensati

Nel 1924 l'indiano Satyendra Nath Bose in una lettera indirizzata ad Albert Einstein gli chiedeva di tradurre e pubblicare un suo lavoro sulla statistica dei fotoni [B] . Einstein nel leggere il testo si rese subito conto del potenziale di quel lavoro, e, dopo averlo tradotto, lo propose per la pubblicazione commentando:

> *"Secondo la mia opinione la derivazione della formula di Plank da parte di Bose rappresenta un grande passo avanti. Il metodo usato si può anche applicare nella teoria quantistica dei gas ideali e io stesso lavorerò nel dettaglio sull'argomento in pubblicazioni successive."*
>
> Albert Einstein, 1924[1]

Da questo primo testo e da alcuni lavori del medesimo anno e dell'anno successivo [E] della coppia nascevano le basi per la teoria dei **Condensati di Bose-Einstein**.

1.1 Condensazione di Bose-Einstein

È sorprendente che, nonostante la sua natura intrinsecamente quantistica, il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein sia stato predetto da Bose e Einstein anni prima del definitivo consolidamento della Meccanica Quantistica. In effetti la comprensione del fenomeno richiede di tenere conto degli effetti quantistici in ambito statistico; più precisamente[2] la condensazione di Bose-Einstein è la manifestazione più rilevante della statistica quantistica di Bose,

[1] "Bose's Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will" in [B], citato in [PSa], pag 6, traduzione a cura dell'autore.

[2] Si faccia riferimento anche a [Lu], [PSm] e [PSt].

argomento effettivo del lavoro sopra citato. Assumendo che lo stato di un sistema di bosoni (particelle quantistiche a spin intero) non-interagenti e privi di spin debba essere simmetrico sotto scambio di particelle, Bose dedusse che il numero di occupazione del livello energetico E_i deve essere dato nella descrizione gran canonica da

$$n_i = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{\kappa T}} - 1},$$

dove $\mu \geq 0$ è il potenziale chimico che deve essere fissato imponendo che il numero totale di particelle sia N, cioè con

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{\kappa T}} - 1} = N.$$

Considerando ad esempio un gas di bosoni tridimensionali non-interagenti confinati in una scatola grande con condizioni periodiche al bordo, i livelli energetici di singola particella sono[3] $E_i = E(\mathbf{k}) = k^2$, dove $\mathbf{k}$ sono i momenti ammissibili per le particelle, ovvero $k_i = \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$, con L lato della scatola e $i = 1, 2, 3$. In tal caso possiamo in prima approssimazione rimpiazzare la somma sui livelli energetici $\sum_i$ con un integrale sui momenti $\mathbf{k}$ delle particelle: dato che a bassa temperatura $\mu \simeq 0$, il numero delle particelle negli stati eccitati N_e (cioè tali che $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$) è perciò dato da (con $\zeta(x)$ la funzione zeta di Riemann e $V = L^3$ il volume della scatola)

$$N_e \simeq \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\mathbf{k} \, \frac{1}{e^{\frac{k^2}{\kappa T}} - 1} = \frac{V(\kappa T)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \, \frac{k^2}{e^{k^2} - 1} = \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) V(\kappa T)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^{\frac{3}{2}}},$$

così che la densità delle particelle $\rho_e := \frac{N_e}{V}$ negli stati eccitati non può eccedere un valore massimo dato da $\frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)(\kappa T)^{\frac{3}{2}} < +\infty$. Pertanto se $\rho > \rho_e$ questo implica che le rimanenti particelle devono occupare il livello fondamentale relativo a $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dato che deve valere

$$N = N_0 + N_e.$$

Usando la stima di sopra abbiamo perciò che la frazione di particelle nello stato fondamentale (ad una particella) sarà data da

$$\frac{N_0}{N} \geq 1 - \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}\rho}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)(\kappa T)^{\frac{3}{2}},$$

con ρ densità del gas. Quindi quando $T \to 0$, tutte le particelle (o una frazione prossima a 1 di esse) occupano lo stesso stato $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

[3] Porremo qui e nel resto della tesi $\hbar = 1$ e in questo specifico caso anche $m = \frac{1}{2}$ per semplificare la discussione.

Più in generale, un sistema di bosoni *non-interagenti* a temperatura prossima allo zero assoluto si troverà in uno stato in cui tutte o quasi le particelle occupano lo stato fondamentale Φ del sistema a un corpo. In effetti nel caso non-interagente tale stato, cioè

$$\Phi(\mathbf{x}_1)\Phi(\mathbf{x}_2)\cdots\Phi(\mathbf{x}_N),$$

coincide con lo stato fondamentale (bosonico) del sistema a N corpi, poiché per ipotesi l'Hamiltoniana si decompone come

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} h_i$$

con, ad esempio, $h_i = p_i^2 + V(\mathbf{x}_i)$ Hamiltoniana ad un corpo. In questo caso ovviamente Φ sarebbe lo stato fondamentale di $h = -\Delta + V(\mathbf{x})$.

Questo tipo di comportamento, che può apparire caratteristico dei sistemi non-interagenti, si osserva a bassa temperatura *anche in presenza di interazione fra le particelle*, purché il gas sia sufficientemente diluito. In questo caso si parlerà di condensazione di Bose-Einstein quando il numero di occupazione dello stato fondamentale del sistema ad un corpo è una frazione prossima a 1 del numero totale di particelle. Si noti che in generale in presenza di interazione non è più vero che lo stato fondamentale del problema a N corpi fattorizza come descritto sopra. Però sotto ipotesi di *alta rarefazione* e bassa temperatura, ci si può aspettare che tale fattorizzazione sia approssimativamente valida quando $N \to +\infty$ (si veda il Capitolo 2.1).

Il lavoro di Bose e Einstein, seppure teoricamente affascinante, non trovò conferme sperimentali effettive fino al 1995, soprattutto per le difficoltà collegate allo sforzo di raggiungere le condizioni necessarie affinché si potessero avere dei fenomeni osservabili: all'epoca infatti non si era in grado di raggiungere temperature così basse. Il risultato fu ottenuto indipendentemente dai gruppi del Jila e del MIT che riuscirono nel 1995 (si veda [A *et al.*], [D *et al.*]) a produrre con successo un condensato di Bose-Einstein facendo uso di tecniche innovative per il raffreddamento di particelle, quali in particolare il raffreddamento per mezzo di laser (*laser cooling*) o l'*evaporative cooling*. Questo lavoro fruttò ai fisici Cornell, Wieman e Ketterle il Nobel nel 2001.

Facciamo notare infine che i condensati hanno un interesse notevole a livello sperimentale in quanto hanno la caratteristica di evidenziare fenomeni quantistici a livello macroscopico [F2], evento molto raro in generale.

1.2 Condensati in rotazione e superfluidità

La condensazione è uno stato della materia che come abbiamo visto si verifica a basse temperature in un gas di bosoni perfetto. Fra le proprietà più peculiari dei condensati vi è quella di essere superfluidi [Le2], ovvero di mostrare *totale assenza di viscosità.*

Lo stato di un *fluido quantistico* (come ad esempio un condensato di Bose-Einstein) è descritto da una funzione d'onda complessa $\Psi(\mathbf{x})$. La velocità angolare (momento angolare) del fluido è sostanzialmente codificata nella fase della funzione d'onda poiché il momento angolare è non nullo solo se tale fase è non banale[4]. Ma una fase non banale attorno ad un punto, cioè con numero di avvolgimento non nullo attorno a tale punto, implica l'annullamento di Ψ nel punto stesso (vortice). Inoltre, essendo Ψ una funzione a valori univoci, il numero di avvolgimento o grado topologico della sua fase attorno a qualsiasi punto deve essere un multiplo intero di 2π, il che implica la quantizzazione della circuitazione attorno al vortice. Per questo l'unica possibile risposta di un superfluido alla rotazione è la creazione di *vortici quantizzati.*

Molta della ricerca effettuata in laboratorio si è concentrata proprio sull'analisi di un condensato intrappolato in rotazione più o meno rapida e sulla conseguente generazione di vortici nello stesso [ARVK], [M *et al.*], [MCWD], [R *et al.*].

È significativo sottolineare come lo studio di questa materia sia avanzato rapidamente nel corso dell'ultimo ventennio, e che oggi sia uno dei campi più fertili di ricerca della fisica[5] e della fisica matematica (si veda per approfondimento anche [A]).

[4] Ricordiamo che in coordinate polari opportune l'operatore momento angolare rispetto all'asse di rotazione si può scrivere nella forma $L = -i\partial_\theta$.

[5] Si veda ad esempio [ABD], [AD], [BR], [CD], [D], [DK], [F2], [FJS], [FB], [FZ], [JK], [JKL], [KTU], [KB], [KF], [Lu].

CAPITOLO 2

Aspetti Matematici: la Teoria di Gross-Pitaevskii

2.1 Condensati in rotazione

Il contesto generale nel quale studieremo il fenomeno della superfluidità nei condensati in rotazione è quello della Teoria di Gross-Pitaevskii, che prende il nome da *Eugene P. Gross* e *Lev P. Pitaevskii* che per primi ricavarono il funzionale per calcolare l'energia di un gas di bosoni in rotazione [G1, G2, P]. Questo funzionale oggi viene chiamato **funzionale di Gross-Pitaevskii** e per un condensato in rotazione in due dimensioni esso è dato da[1]

$$\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}[\Psi] := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \left\{ \frac{1}{2} \left|(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A_{\mathrm{rot}}})\Psi\right|^2 + \right. \\ \left. + \left(V(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{2}\Omega^2_{\mathrm{rot}} r^2 \right) |\Psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\Psi|^4 \right\} \tag{2.1}$$

con V potenziale intrappolante, Ω_{rot} velocità di rotazione del condensato e $\boldsymbol{A_{\mathrm{rot}}}$ un potenziale vettore associato alla rotazione, che in coordinate polari è della forma

$$\boldsymbol{A_{\mathrm{rot}}} := \Omega_{\mathrm{rot}} \wedge \boldsymbol{r} = \Omega_{\mathrm{rot}} r \boldsymbol{e_\theta}$$

con

$$\boldsymbol{e_\theta} := \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si può dimostrare[2] che in opportuni limiti di scala tale funzionale approssima l'energia per particella di un gas diluito di bosoni in rotazione a basse temperature.

[1] In generale rappresenteremo in grassetto i vettori e in caratteri normali gli scalari, cioè $r = |\boldsymbol{r}|$.

[2] Si veda [BCPY], [LS], [S2] per la derivazione rigorosa di questo funzionale per condensati in rotazione.

Consideriamo infatti il sistema di N bosoni descritto dall'Hamiltoniana

$$H_N := \sum_{i=1}^{N} H_0^{(i)} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} v_N(\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j})$$

dove $H_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A}_{\mathbf{rot}})^2 + V$ rappresenta l'Hamiltoniana di singola particella e v_N rappresenta l'interazione fra le particelle, che tipicamente si assume essere repulsiva. Si parla di **limite di Gross-Pitaevskii** nel caso in cui si consideri il limite $N \to +\infty$ mantenendo costante il prodotto fra N e la lunghezza di scattering, come, ad esempio, per un potenziale riscalato della forma $v_N(x) = N^2 v(Nx)$ con v indipendente da N e con lunghezza di scattering $g > 0$. In questo limite lo studio di H_N è legato alla minimizzazione dell'energia di Gross-Pitaevskii e in questo parallelo l'intensità del potenziale di campo medio (coefficiente del termine quartico in (2.1)) è proporzionale alla lunghezza di scattering g. Questo limite è stato studiato in [LS] a Ω velocità di rotazione e ε costante di accoppiamento fissate, ma rimane per lo più (si veda [BCPY]) un problema aperto la derivazione dello stesso modello nel limite di $\Omega \gg 1$ e/o $\varepsilon \ll 1$. In particolare il regime $\varepsilon \ll 1$, anche detto di **Thomas-Fermi** è particolarmente rilevante nel confronto con i dati sperimentali come si osserva, dopo gli opportuni cambiamenti di scala, con un semplice confronto con le misure sperimentali.

La scelta di considerare un condensato bidimensionale è motivata dal contesto sperimentale. Tipicamente si considerano infatti trappole il cui confinamento nella terza direzione è o molto forte oppure sostanzialmente assente. Nel primo caso $\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}$ fornisce l'energia del sistema mentre nel secondo si sfrutta l'invarianza per traslazioni nella terza coordinata per ottenere $\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}$ come energia per sezione del condensato.

Inoltre nella maggior parte delle situazioni sperimentali il potenziale è radiale e quadratico (armonico). Un potenziale di questa forma però non consente in generale velocità arbitrarie per il condensato. Essendo infatti competitivo rispetto alla rotazione, esisterà una velocità critica oltre la quale la massa del condensato non sarà più confinata e le particelle riusciranno a sfuggire alla trappola. Per velocità prossime alla frequenza armonica della trappola si osserva in questo caso un comportamento tipo effetto Hall quantistico [AB, ABN] il cui studio esula dagli scopi di questa tesi.

Nel 2001 in [F1] viene proposta l'idea di studiare allora un potenziale intrappolante che ad una componente quadratica affiancasse una componente quartica, cioè un potenziale della forma

$$V(r) := r^2 + kr^4.$$

Un tale potenziale poteva teoricamente intrappolare il condensato per qualsiasi velocità ed essere una migliore approssimazione di trappole realistiche per le quali un'espansione puramente quadratica attorno al minimo fosse troppo semplicistica.

Esperimenti con potenziali di questo tipo sono stati poi realizzati dal gruppo di ricerca dell'ENS (École Normale Supérieure di Parigi) in [BSSD] e [SBCD], e questa esperienza ha generato un vasto interesse per l'argomento che ha fatto produrre anche molti esperimenti al riguardo, rivelando la ricca struttura dei condensati in rotazione.

Nel corso di questo lavoro si è considerato un potenziale V della forma

$$V(r) := kr^s$$

con $k > 0$ e $s > 2$, che rappresenta il caso classico di un potenziale anarmonico.

Questo modello si dice con potenziale *soft*, ma facciamo notare che dei risultati analoghi a quelli di seguito esposti per un potenziale di questa forma si possono dimostrare anche per un modello differente. Si può infatti supporre il condensato completamente confinato in un disco finito, situazione che idealmente è analoga a pensare $s = +\infty$ e rappresenta un potenziale *hard*, e studiare lo stesso problema. Naturalmente in un problema di questa forma bisogna imporre le giuste condizioni al contorno, che in questo caso sono di tipo Dirichlet o Neumann a seconda del modello che si voglia studiare. Come si può vedere in [CPRY4, CPRY5, CDY1, CRY, CY, R2], il comportamento del modello è molto simile e faremo comunque riferimento a questo nel corso della trattazione.

Fra i risultati noti in letteratura meritano di essere menzionati in questo contesto anche i due lavori [R2] e [AAB]. Nel primo si studia la transizione ad uno stato di vortice gigante ad ε fissato quando Ω tende a $+\infty$; nel secondo invece lo stato di vortice gigante è prodotto dalla presenza di una trappola opportuna (ε-dipendente) che confina il condensato in una corona circolare, ma le velocità angolari considerate sono molto più basse (dell'ordine di $|\log\varepsilon|$).

2.2 Velocità critiche e transizioni di fase

Da ora in avanti considereremo dunque la seguente energia:

$$\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}[\Psi] := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \left\{ \frac{1}{2} \left|(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A}_{\mathbf{rot}})\Psi\right|^2 + \left(V(r) - \frac{1}{2}\Omega^2_{\mathrm{rot}} r^2 \right) |\Psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\Psi|^4 \right\}$$

con

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{rot}} := \Omega_{\mathrm{rot}} \wedge \boldsymbol{r} = \Omega_{\mathrm{rot}} r \boldsymbol{e_\theta}, \qquad V(r) := kr^s,$$

$k > 0$ e $s > 2$, nel regime asintotico $\varepsilon \to 0$.

L'analisi effettiva del condensato in rotazione[3] consiste nello studiare la minimizzazione di $\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}$ su di un opportuno dominio

$$\mathcal{D}^{\mathrm{GP}} := \left\{ \Psi \in H^1(\mathbb{R}^2),\ r^s|\psi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),\ \|\Psi\|_2 = 1 \right\}$$

e quindi lo stato del condensato è rappresentato dal minimizzatore dell'energia su $\mathcal{D}^{\mathrm{GP}}$, cioè lo stato ψ^{GP} tale che[4]

$$E^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}} := \inf_{\psi \in \mathcal{D}^{\mathrm{GP}}} \mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}[\psi] = \mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}[\psi^{\mathrm{GP}}].$$

Quando mettiamo in rotazione un condensato, esso attraversa varie fasi:

- inizialmente il condensato ruota ma la rotazione non ha effetti;
- successivamente, quando Ω_{rot} oltrepassa una velocità critica Ω_{c_1}, vi è la formazione di un singolo vortice nell'origine;
- aumentando la velocità angolare si formano altri vortici che si vanno a distribuire uniformemente nel condensato[5]; ci si aspetta inoltre che in questo regime i vortici si distribuiscano in un reticolo triangolare regolare (detto reticolo di Abrikosov) ma questo è ancora un problema interamente aperto dal punto di vista matematico;
- raggiunta una seconda velocità critica Ω_{c_2} il condensato forma una cavità nella distribuzione della sua massa che va ad assumere una forma ad anello;
- incrementando ancora la velocità di rotazione i vortici restano comunque distribuiti nell'anello in modo uniforme fino a quando non viene raggiunta una terza velocità critica Ω_{c_3} e i vortici all'interno dell'anello svaniscono completamente; vi sono ancora dei vortici nella zona in cui la massa del condensato è esponenzialmente piccola, ma sono assimilabili in termini di energia ad un unico vortice complessivo.

[3] Si veda anche [S1].

[4] L'esistenza di un minimizzatore segue da argomenti standard, si veda ad esempio [LSSY] o [S1].

[5] Questo è stato dimostrato nel caso di potenziali *hard* in [CPRY1] e [CY] rispettivamente, e per potenziali *soft* in [CPRY3].

Nello studio specifico di questi problemi sono utili vari riscalamenti delle lunghezze, al fine di estrarre un comportamento asintotico non banale. Ci si aspetta infatti che dopo un opportuno riscalamento il funzionale di Gross-Pitaevskii sia ben rappresentato da un funzionale effettivo di tipo Thomas-Fermi.

2.2.1 Prima velocità critica e primo riscalamento

Il primo riscalamento che definiamo varrà fintantoché consideremo velocità dell'ordine

$$\Omega_{\mathrm{rot}} \lesssim \varepsilon^{-\frac{s-2}{s+2}}.$$

Definiamo

$$R_\varepsilon := (k\varepsilon^2)^{-\frac{1}{s+2}},$$

e scrivendo[6]

$$\boldsymbol{x} := \frac{1}{R_\varepsilon}\boldsymbol{r}, \qquad \psi(\boldsymbol{x}) := R_\varepsilon \Psi(\boldsymbol{r}),$$

$$\omega := R_\varepsilon^2 \Omega_{\mathrm{rot}}, \qquad \boldsymbol{A_\omega} := R_\varepsilon \boldsymbol{A_{\mathrm{rot}}} = \omega x \boldsymbol{e_\theta},$$

possiamo scrivere l'energia come

$$\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}[\Psi] = \frac{1}{R_\varepsilon^2}\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_\omega[\psi]$$

con

$$\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_\omega[\psi] := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A_\omega})\psi\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[x^s|\psi|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2x^2|\psi|^2 + |\psi|^4 \right] \right\}$$

e definire

$$E^{\mathrm{GP}}_\omega := \inf_{\psi \in \mathcal{D}^{\mathrm{GP}}} \mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_\omega[\psi].$$

Quando $\varepsilon \to 0$ si può dimostrare [CDY2, CY, IM2] che il funzionale di Gross-Pitaevskii può essere approssimato da un funzionale di tipo **Thomas-Fermi**, definito come

$$\mathcal{F}^{\mathrm{TF}}_\omega[\rho] := \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left[(x^s + \rho)\,\rho - \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2x^2\rho \right]$$

minimizzato sul dominio

$$\mathcal{D}^{\mathrm{TF}} := \left\{ \rho \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \|\rho\|_1 = 1 :\ \rho \geq 0,\ x^s\rho \in L^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

[6] Notiamo che questo riscalamento della funzione Ψ in ψ non ne cambia la norma in $L^2(\mathbb{R}^2)$, ma che se ψ varia su scala di ordine 1 (come sarà) allora $\Psi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

con

$$E_\omega^{\mathrm{TF}} := \inf_{\rho \in \mathcal{D}^{\mathrm{TF}}} \mathcal{F}_\omega^{\mathrm{TF}}[\rho].$$

Si dimostra facilmente (analogamente a quanto fatto anche in questo testo, si veda ad esempio la dimostrazione della Proposizione **5.1.1**) che il minimo è raggiunto e che il minimizzatore, a meno di sceglierlo positivo, è unico. Se chiamiamo tale minimizzatore $\rho_\omega^{\mathrm{TF}}$ allora esso è esplicito e della forma

$$\rho_\omega^{\mathrm{TF}} := \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 \mu_\omega^{\mathrm{TF}} - x^s + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \omega^2 x^2\right]_+$$

dove μ_ω^{TF} è fissato in modo che $\rho_\omega^{\mathrm{TF}}$ abbia norma unitaria. Facendo uso di questo funzionale si dimostra dunque un primo risultato riguardo l'energia del condensato (Teorema 3.1 in [CDY2]).

Teorema (CDY). *Se $\omega \ll \varepsilon^{-1}$ allora si ha*

$$\boxed{E_\omega^{\mathrm{GP}} = E_0^{\mathrm{TF}} + o\left(\varepsilon^{-2}\right),}$$

ed inoltre, se $\psi_\omega^{\mathrm{GP}}$ è un qualsiasi minimizzatore per $\mathcal{E}_\omega^{\mathrm{GP}}$

$$\boxed{\left\| |\psi_\omega^{\mathrm{GP}}|^2 - \rho_0^{\mathrm{TF}} \right\|_2 = o(1).}$$

Questo teorema ci permette di capire che la forma assunta dal condensato è legata alla forma del minimizzatore di Thomas-Fermi *senza rotazione* fintantoché $\omega \ll \varepsilon^{-1}$, ed in particolare si riesce a dimostrare anche che $\psi_\omega^{\mathrm{GP}}$ è esponenzialmente piccola al di fuori del supporto di ρ_0^{TF} (si ottengono cioè stime simili a quella del Teorema 3.2 in [CDY2]).

Dato che la prima velocità critica è data da [AJR, IM1, IM2]

$$\Omega_{\mathrm{c}_1} \propto \varepsilon^{\frac{4}{s+2}} |\log \varepsilon|$$

allora avremo che ad essa sarà associata una relativa velocità critica

$$\omega_{\mathrm{c}_1} \propto |\log \varepsilon|.$$

Per $\Omega_{\mathrm{rot}} < \Omega_{\mathrm{c}_1}$, e conseguentemente per $\omega < \omega_{\mathrm{c}_1}$, abbiamo che il condensato non presenta vortici ed anzi, a meno di una fase, il minimizzatore dell'energia è lo stesso del caso senza rotazione (come mostrato in [AJR]). Inoltre si ha che in particolare la velocità critica è della forma $\omega_{\mathrm{c}_1} = \omega_0 |\log \varepsilon|$ con

$$\omega_0 := \frac{\pi}{2}\left(\frac{2(s+2)}{\pi s}\right)^{\frac{s}{s+2}}$$

e di conseguenza $\Omega_{c_1} = \frac{1}{R_\varepsilon^2}\omega_{c_1}$ (si veda l'equazione (1.13) in [CR]).

Lo stesso tipo di comportamento si può notare anche nel caso in cui il condensato si supponga confinato in un disco. In quel caso, non essendo necessario nessun riscalamento, la velocità critica è dell'ordine di $|\log\varepsilon|$, risultato coerente con l'idea che il modello di condensato vincolato non è altro che un potenziale in cui $s = +\infty$.

Superata la soglia critica di ω_{c_1}, vi è la nucleazione di un primo vortice nell'origine e successivamente il numero di vortici continua a crescere con ω, restando però uniformemente limitato se $\omega = \omega_{c_1}|\log\varepsilon|(1+o(1))$. Quando invece $\omega = \bar{\omega}|\log\varepsilon|$ con $\bar{\omega} > \omega_{c_1}$ il numero di vortici diverge quando $\varepsilon \to 0$, ma allo stesso tempo essi restano confinati in una sottoregione del dominio $\mathrm{supp}\left(\rho_0^{\mathrm{TF}}\right)$ occupata dal condensato. In [CR] è stata ricavata la forma esplicita della densità di vorticità.

Quando $\omega \gg |\log\varepsilon|$ i vortici occupano l'intero dominio del condensato ed inoltre si può dimostrare che vale la seguente stima (Teorema **1.1** in [CPRY3]) con $\omega_{c_2} \propto \varepsilon^{-1}$ e il cui valore esplicito vedremo in seguito.

Teorema (CPRY). *Per* $|\log\varepsilon| \ll \omega \leq \omega_{c_2}$ *si ha*

$$\boxed{E_\omega^{\mathrm{GP}} = E_\omega^{\mathrm{TF}} + \frac{1}{2}\omega\left|\log\left(\varepsilon^2\omega\right)\right|(1+o(1)).}$$

Da questo segue che il minimizzatore di Gross-Pitaevskii è vicino alla radice del minimizzatore di Thomas-Fermi, cioè vale l'equazione (1.39) in [CPRY3] e $\psi_\omega^{\mathrm{GP}}$ continua ad essere esponenzialmente piccola in ε al di fuori di $\mathrm{supp}\left(\rho_\omega^{\mathrm{TF}}\right)$:

$$\left\| |\psi_\omega^{\mathrm{GP}}|^2 - \rho_\omega^{\mathrm{TF}} \right\|_2 = o(1).$$

In questo regime si ha inoltre che la vorticità è uniformemente distribuita all'interno di $\mathrm{supp}\left(\rho_\omega^{\mathrm{TF}}\right)$ come si vede nel Teorema **1.2** in [CPRY3].

Per i condensati confinati in un disco con condizioni al contorno valgono dei risultati quasi identici, illustrati per le condizioni di Neumann in [CY] e per le condizioni di Dirichlet in [CPRY1]. Sottolineiamo il fatto che, come era prevedibile, la stima per l'energia nel caso Dirichlet è leggermente più alta degli altri casi.

2.2.2 Seconda velocità critica

La seconda velocità critica di rotazione per il condensato si ha quando il profilo di Thomas-Fermi crea una cavità all'interno della sua distribuzione.

Essa è della forma

$$\Omega_{c_2} \propto \varepsilon^{\frac{4}{s+2}-1}$$

ed è definita a partire da una seconda velocità critica per ω:

$$\omega_{c_2} \propto \varepsilon^{-1}.$$

Infatti in questo regime abbiamo che $\rho_\omega^{\mathrm{TF}}$ è della forma

$$\rho_\omega^{\mathrm{TF}} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2\mu_\omega^{\mathrm{TF}} - x^s + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2 x^2\right]_+.$$

Per avere che un profilo di questa forma si annulli nell'origine si deve verificare che $\mu_\omega^{\mathrm{TF}} \leq 0$. Per trovare allora la velocità critica per la quale ciò accade cerchiamo ω_{c} tale che $\mu_{\omega_{\mathrm{c}}}^{\mathrm{TF}} = 0$. La condizione di norma unitaria ci dà

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left[-x^s + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_{\mathrm{c}}^2 x^2\right]_+ = \pi\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ x^3\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_{\mathrm{c}}^2 - x^{s-2}\right]_+.$$

Se ora indichiamo con $\bar{x} := \left(\frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_{\mathrm{c}}^2\right)^{\frac{1}{s-2}}$ abbiamo

$$1 = \pi\int_0^{\bar{x}} \mathrm{d}x\ x^3\left[\bar{x}^{s-2} - x^{s-2}\right] = \frac{\pi(s-2)}{4(s+2)}\bar{x}^{s+2} \Rightarrow \bar{x} = \left[\frac{4(s+2)}{\pi(s-2)}\right]^{\frac{1}{s+2}}$$

e dunque

$$\omega_{\mathrm{c}} = \sqrt{2}\bar{x}^{\frac{s-2}{2}}\varepsilon^{-1} = \sqrt{2}\left[\frac{4(s+2)}{\pi(s-2)}\right]^{\frac{s-2}{2(s+2)}}\varepsilon^{-1} = 2^{\frac{s}{s+2}}\left[\frac{4(s+2)}{\pi(s-2)}\right]^{\frac{s-2}{2(s+2)}}\varepsilon^{-1}.$$

che rappresenta la seconda velocità critica per ω.

Non appena $\Omega_{\mathrm{rot}} > \Omega_{c_2}$ si forma una cavità nella distribuzione di massa del condensato e dunque di un anello in cui la massa è concentrata; si forma cioè un'area intorno all'origine in cui lo stato del condensato è esponenzialmente piccolo e possiamo quindi identificare una seconda transizione di fase; in altre parole vale la seguente Proposizione (Proposizione **1.1** in [CPRY3]).

Proposizione (CPRY). *Se esiste* Ω_0 *tale che* $\Omega_{\mathrm{rot}} \geq \Omega_0\varepsilon^{\frac{4}{s+2}-1} > \Omega_{c_2}$, *allora esiste* $0 < x_{\mathrm{c}} < 1$ *tale che per ogni* $0 \leq x \leq x_{\mathrm{c}}$ *si ha*

$$\left|\Psi^{\mathrm{GP}}(\boldsymbol{x})\right| = \mathcal{O}(\varepsilon^\infty).$$

Anche nel caso di condensato in un disco si evidenzia la stessa transizione di fase e di nuovo la velocità di transizione è coerente con l'ipotesi di potenziale infinito, cioè la velocità di rotazione critica è dell'ordine di ε^{-1}.

2.2.3 Terza velocità critica e secondo riscalamento

Per studiare la terza transizione si usa un secondo riscalamento valido per velocità di rotazione dell'ordine di

$$\Omega_{\mathrm{rot}} \gtrsim \varepsilon^{-\frac{s-2}{s+2}}.$$

Quando infatti $\omega \gg \varepsilon^{-1}$ il dominio occupato dal condensato, ovvero il supporto di $\rho_\omega^{\mathrm{TF}}$, si stringe a 0. Più precisamente tende all'anello su cui il potenziale generato dalla trappola e dalla rotazione ha un minimo. Conviene perciò riscalare le lunghezze attorno a tale raggio R_{m} dato da

$$R_{\mathrm{m}} := \left(\frac{\Omega_{\mathrm{rot}}^2}{sk}\right)^{\frac{1}{s-2}}$$

e denotando

$$\boldsymbol{x} := \frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\boldsymbol{r}, \qquad \psi(\boldsymbol{x}) := R_{\mathrm{m}}\Psi(\boldsymbol{r}),$$

$$\Omega := R_{\mathrm{m}}^2\Omega_{\mathrm{rot}}, \qquad \boldsymbol{A_\Omega} := R_{\mathrm{m}}\boldsymbol{A_{\mathrm{rot}}} = \Omega x \boldsymbol{e_\theta}$$

possiamo scrivere l'energia come[7]

$$\mathcal{E}_{\mathrm{fis}}^{\mathrm{GP}}[\Psi] = \frac{1}{R_{\mathrm{m}}^2}\left[\mathcal{E}_\Omega^{\mathrm{GP}}[\psi] + \Omega^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

con

$$\mathcal{E}_\Omega^{\mathrm{GP}}[\psi] := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{\frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A_\Omega})\psi\right|^2 + \Omega^2 W(x)|\psi|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\psi|^4\right\}$$

e con il nuovo potenziale dato da

$$W(x) := \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Notiamo che abbiamo riscalato il potenziale in modo tale che esso sia positivo e abbia un minimo in $x = 1$.

Notiamo anche che il rapporto fra i due riscalamenti è dato da

$$\Omega_{\mathrm{rot}} = (k\varepsilon^2)^{\frac{2}{s+2}}\omega = (sk)^{\frac{2}{s+2}}\Omega^{\frac{s-2}{s+2}} \Longrightarrow \omega = s^{\frac{2}{s+2}}\varepsilon^{-\frac{4}{s+2}}\Omega^{\frac{s-2}{s+2}}$$

e in particolare

$$\Omega_{\mathrm{rot}} \sim \varepsilon^{-\frac{s-2}{s+2}} \Longleftrightarrow \omega \sim \varepsilon^{-1} \Longleftrightarrow \Omega \sim \varepsilon^{-1}.$$

[7] Notiamo che per l'uguaglianza è essenziale che stiamo testando il funzionale energia su stati normalizzati.

In questo regime il funzionale di Thomas-Fermi assume la forma di

$$\mathcal{F}_{\Omega}^{\mathrm{TF}}[\rho] := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \; \left[\Omega^2 W(x)\rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\rho^2\right]$$

e se come sopra lo minimizziamo su $\mathcal{D}^{\mathrm{TF}}$ otteniamo

$$E_{\Omega}^{\mathrm{TF}} := \inf_{\rho \in \mathcal{D}^{\mathrm{TF}}} \mathcal{F}_{\Omega}^{\mathrm{TF}}[\rho].$$

A questo punto vale il seguente teorema (sempre **1.1** in [CPRY3]).

Teorema (CPRY). *Se* $\Omega_c = R_m^2 R_\varepsilon^{-2} \omega_{\mathrm{c}_2}$ *allora per* $\Omega_c \leq \Omega \ll \varepsilon^{-4}$ *si ha*

$$\boxed{E_{\Omega}^{\mathrm{GP}} = E_{\Omega}^{\mathrm{TF}} + \frac{1}{2}\Omega \left|\log\left(\varepsilon^4 \Omega\right)\right| (1 + o(1)).}$$

In particolare finché $\Omega \ll \varepsilon^{-4}$ ogni minimizzatore $\psi_{\Omega}^{\mathrm{GP}}$ continua ad essere vicino a $\rho_{\Omega}^{\mathrm{TF}}$ e i vortici ad essere uniformemente distribuiti all'interno del supporto di $\rho_{\Omega}^{\mathrm{TF}}$.

Quello che succede a questo punto è che quando $\Omega_{\mathrm{rot}} \sim \Omega_{\mathrm{c}_3}$ con

$$\Omega_{\mathrm{c}_3} \propto \varepsilon^{-4\frac{s-2}{s+2}}$$

cioè nel regime in cui

$$\Omega \sim \varepsilon^{-4}$$

vi è una terza transizione di fase e accade che nell'anello in cui è concentrata la massa i vortici scompaiono completamente.

Per i condensati in un disco la situazione è leggermente diversa. Infatti la velocità di transizione stavolta è dell'ordine di $\left(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|\right)^{-1}$, in disaccordo con il valore di ε^{-4} che ci saremmo aspettati dal limite per $s = +\infty$. Questo è legato ad un fenomeno specifico dell'impostazione che abbiamo dato al problema; infatti nel nostro caso la scomparsa dei vortici è legata ad una questione dimensionale, nel senso che lo spessore dell'anello diventa troppo sottile per contenere dei vortici che quindi scompaiono, mentre per potenziali *hard* la scomparsa dei vortici è interamente dovuta a ragioni energetiche (si vedano [CRY, CPRY1, R2]).

Il nostro problema si colloca in questo ambito, e dunque l'energia che studieremo da ora in poi sarà $\mathcal{E}_{\Omega}^{\mathrm{GP}}$.

CAPITOLO 3

Formulazione del Problema: Regime di Vortice Gigante

Da qui in avanti considereremo

$$\boxed{\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon^4}.}$$

Definiamo allora il **funzionale di Gross-Pitaevskii** come

$$\mathcal{E}_\Omega^{\mathrm{GP}}[\psi] := \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2} \left| (\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A_\Omega})\, \psi \right|^2 + \Omega^2 W(x) \left|\psi\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left|\psi\right|^4 \right\} \tag{3.1}$$

definito su funzioni ψ in $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, con

$$W(x) := \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2}, \quad s > 2,$$

$$\boldsymbol{A_\Omega} := \Omega x \boldsymbol{e_\theta}, \quad \Omega > 0.$$

Minimizziamo questo funzionale sul dominio definito come

$$\mathcal{D}^{\mathrm{GP}} := \left\{ \psi \in H^1(\mathbb{R}^2),\ x^s|\psi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),\ \|\psi\|_2^2 = 1 \right\}$$

e definiamo il minimo dell'energia come

$$E_\Omega^{\mathrm{GP}} := \inf_{\psi \in \mathcal{D}^{\mathrm{GP}}} \mathcal{E}_\Omega^{\mathrm{GP}}[\psi] = \mathcal{E}_\Omega^{\mathrm{GP}}[\psi^{\mathrm{GP}}].$$

Il primo problema che ci poniamo è

Problema 1. *Quale forma assume il minimizzatore per $\Omega_{\mathrm{rot}} \geq \Omega_{c_3}$?*

In particolare vorremmo riuscire a mostrare che oltre Ω_{c_3} vi è un anello della forma

$$A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ |1 - \boldsymbol{x}| = o(1)\}$$

tale da contenere la massa del condensato a meno di errori di ordine più alto e nel quale il minimizzatore non contenga vortici. L'esistenza di A è in realtà garantita dalla Proposizione 3.1 in [CPRY3], che ci permette di fissarne la larghezza in modo proporzionale a $\varepsilon^2 |\log \varepsilon|$.

L'assenza di vortici (zeri) di ψ^{GP} in A per $\Omega > \Omega_{c_3}$ implica che la funzione può essere decomposta in questa regione come prodotto di una funzione radiale (che sarà il "profilo di vortice gigante" o di *giant vortex*) per una fase intera, cioè

$$\psi^{\mathrm{GP}}(\boldsymbol{x}) \sim f(\boldsymbol{x}) e^{i\gamma\theta}.$$

Possiamo allora riformulare meglio il Problema **1**.

Problema 2. *Quali sono il profilo f e la fase γ ottimali per il regime di giant vortex?*

In generale l'energia del *giant vortex* differirà da E_{Ω}^{GP}, però, con stime dall'alto e dal basso dell'energia, ci aspettiamo di riuscire a dimostrare che sopra Ω_{c_3} tali valori siano asintoticamente vicini e in questo caso ψ^{GP} sarà ben rappresentata da uno stato con un unico vortice nell'origine (da cui la dicitura di "vortice gigante"). In questo lavoro ci siamo dedicati a mostrare la stima dall'alto, un *upper bound* per l'energia.

Notiamo che un qualsiasi risultato di questo tipo non potrà mai produrre un minimizzatore esatto. Infatti nella stima facciamo uso di una funzione test radiale, ma se anche fosse vero che all'interno di A il minimizzatore è vicino ad una funzione radiale, questo non sarebbe possibile al suo esterno. Infatti il Teorema 1.6 in [CPRY1] ci assicura che qualsiasi minimizzatore dell'energia di Gross-Pitaevskii non può essere invariante per rotazioni, nemmeno per $\Omega > \Omega_{c_3}$.

Ora, cercare un minimizzatore con vortice unico nell'origine vuol dire cercarlo della forma $\psi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})e^{i\gamma\theta}$ con f *reale*. Affinché ψ sia ben definita assumiamo che $\gamma \in \mathbb{Z}$ con $\gamma \neq 0$.

3.1 Funzionale di *giant vortex*

Scegliamo dunque come ansatz una funzione definita come sopra e calcoliamone l'energia. Abbiamo allora:

$$\mathcal{E}_{\Omega}^{\mathrm{GP}}\left[f e^{i\gamma\theta}\right] = \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2} \left| (\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\Omega}}) \left(f e^{i\gamma\theta} \right) \right|^2 + \Omega^2 W(x) f^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f^4 \right\}.$$

Ricordando che possiamo scrivere il gradiente di $fe^{i\gamma\theta}$ come

$$\boldsymbol{\nabla}\left(fe^{i\gamma\theta}\right) = (\boldsymbol{\nabla} f)\, e^{i\gamma\theta}\boldsymbol{e_r} + \frac{i\gamma}{x} fe^{i\gamma\theta}\boldsymbol{e_\theta}$$

allora possiamo riscrivere il primo termine:

$$\frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{\nabla} - i\boldsymbol{A_\Omega})\left(fe^{i\gamma\theta}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{\nabla} f)\, e^{i\gamma\theta}\boldsymbol{e_r} + \frac{i\gamma}{x} fe^{i\gamma\theta}\boldsymbol{e_\theta} - i\Omega x fe^{i\gamma\theta}\boldsymbol{e_\theta}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla} f|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{x} - \Omega x\right)^2 f^2 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla} f|^2 + \frac{\Omega^2}{2x^2}\left(x^2 - \frac{\gamma}{\Omega}\right)^2 f^2$$

Risulta naturale introdurre un ulteriore funzionale, il cosiddetto **funzionale di vortice gigante** (o funzionale di *giant vortex*):

$$\mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_\gamma[f] := \mathcal{E}^{\mathrm{GP}}[fe^{i\gamma\theta}] = \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{x} \left\{\frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla} f|^2 + \Omega^2 U(x) f^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f^4\right\} \tag{3.2}$$

con U definito come

$$U(x) := \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\gamma}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{x^2} + \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2}$$

che minimizzeremo su un opportuno dominio

$$\mathcal{D}^{\mathrm{gv}}_\gamma := \left\{f \in H^1(\mathbb{R}^2),\ f = f^*,\ x^s f^2 \in L^1(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_2^2 = 1\right\},$$

$$E^{\mathrm{gv}}_\gamma := \inf_{f\in\mathcal{D}^{\mathrm{gv}}_\gamma} \mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_\gamma[f].$$

Notiamo che questo funzionale è in realtà un funzionale di funzioni a valori reali e soprattutto che resta ben definito anche per γ reali e non necessariamente interi. L'idea alla base del nostro lavoro è di cercare il minimo dell'energia $\mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_\gamma$ e il relativo minimizzatore e successivamente minimizzare questo suddetto minimo E^{gv}_γ rispetto a $\gamma \in \mathbb{R}$.

Dato che ora γ rappresenta la velocità angolare del condensato in rotazione, è naturale scegliere $\gamma := \Omega + \delta$, e successivamente cercare δ_* critico tale che il relativo minimo dell'energia sia minimo, o più semplicemente tale che

$$E^{\mathrm{gv}}_{\Omega+\delta_*} = \inf_{\delta\in\mathbb{R}} E^{\mathrm{gv}}_{\Omega+\delta}.$$

Si noti che a priori possiamo aspettarci che δ_* possa essere non unico. Tuttavia ad ogni valore δ_* resterà associata una funzione f_* minimizzante per E^{gv}_γ, e saranno queste che vorremo usare per la stima dall'alto. Cercheremo cioè di dare una risposta ai seguenti problemi specifici, che a loro volta risolvono il Problema **2**.

Problema 3. *Qual è il valore di δ_*?*

Problema 4. *Qual è il profilo del minimizzatore associato a δ_*? Quanto vale la sua energia?*

Problema 5. *Che stima possiamo avere su E_Ω^{GP} in termini di $E_{\delta_*}^{\mathrm{gv}}$?*

3.2 Lo stato dell'arte

Il fatto che per $\Omega \sim \frac{1}{\varepsilon^4}$ vi sia una effettiva transizione di fase è stato mostrato in [CPRY3]; in quel contesto si è introdotto un funzionale di *giant vortex* leggermente differente dato da[1] $\widetilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{gv}} = \mathcal{E}_{\lfloor\Omega\rfloor}^{\mathrm{gv}}$ e si è mostrato che esso approssima bene l'energia di Gross-Pitaevskii quando $\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon^4}$ per Ω_0 sufficientemente grande.

Più precisamente, se definiamo

$$\widetilde{E}^{\mathrm{gv}} := \inf_{f \in \mathcal{D}_{\lfloor\Omega\rfloor}^{\mathrm{gv}}} \widetilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{gv}}[f] = E_{\lfloor\Omega\rfloor}^{\mathrm{gv}}$$

allora vale il seguente teorema (**1.4** in [CPRY3]).

Teorema (CPRY). *Esiste una costante finita $\overline{\Omega}_0$ tale che per ogni $\Omega_0 \geq \overline{\Omega}_0$ si ha*

$$\boxed{E_\Omega^{\mathrm{GP}} = \frac{1}{\varepsilon^4}\widetilde{E}^{\mathrm{gv}} + \mathcal{O}(|\log\varepsilon|^{\frac{9}{2}}).}$$

Facendo uso di questo teorema in [CPRY3] si fa anche vedere che se definiamo

$$\tilde{A} := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x} - 1| \leq c\frac{|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2}}}{\Omega^{\frac{1}{2}}} \right\}, \qquad \text{con } 0 < c < \sqrt[2]{\frac{2}{s}},$$

e se chiamiamo $\tilde{g}_{\mathrm{gv}}$ il minimizzatore per il funzionale $\widetilde{\mathcal{E}}^{\mathrm{gv}}$, cioè la funzione $\tilde{g}_{\mathrm{gv}} \in \mathcal{D}_{\lfloor\Omega\rfloor}^{\mathrm{gv}}$ tale che $\tilde{E}^{\mathrm{gv}}[\tilde{g}_{\mathrm{gv}}] = \tilde{E}^{\mathrm{gv}}$, allora vale il seguente teorema (**1.3** di [CPRY3]).

Teorema (CPRY). *Esiste una costante $\overline{\Omega}_0$ (la stessa del teorema precedente) tale che se $\Omega_0 \geq \overline{\Omega}_0$ nessun minimizzatore ψ^{GP} di $\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}$ si annulla in $\tilde{A}$, e in particolare per ogni $\boldsymbol{x} \in \tilde{A}$*

$$\boxed{\left|\psi^{\mathrm{GP}}(\boldsymbol{x})\right| = \tilde{g}_{\mathrm{gv}}\left(1 + \mathcal{O}(|\log\varepsilon|^{-a})\right)}$$

per ogni $a > 0$.

[1] Con $\lfloor\cdot\rfloor$ intenderemo la parte intera.

L'utilizzo del funzionale di *giant vortex* per approssimare la soluzione ottimale per velocità prossime alla terza velocità critica è stato precedentemente introdotto in [CPRY1] e in [CRY] nei contesti differenti descritti in precedenza. Le tecniche usate per l'approssimazione del minimizzatore di Gross-Pitaevskii per mezzo di quello di *giant vortex* sono molto simili a quelle introdotte in [CPRY3] ma si differenziano chiaramente per la diversa scelta di γ.

In [CPRY3] infatti si è sfruttato il fatto che per Ω_0 sufficientemente grande il profilo del minimizzatore cambia natura rispetto al minimizzatore di Thomas-Fermi (che era valido fintantoché $\Omega \ll \frac{1}{\varepsilon^4}$) approssimando un profilo gaussiano.

La scelta di γ come $\lfloor \Omega \rfloor$ in [CPRY3] è confermata dalla stima del Teorema seguente (Teorema **1.5**).

Teorema (CPRY). *Se* $\Omega_0 > \overline{\Omega}_0$ *(la stessa dei teoremi precedenti) e* R *è un qualsiasi raggio tale che*

$$R = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\right),$$

allora[2]

$$\deg(\psi^{\mathrm{GP}}, \partial B_R) = \Omega + \mathcal{O}\left(\Omega_0 |\log \varepsilon|^{\frac{9}{4}}\right).$$

Questo tuttavia non esclude correzioni più piccole di $|\log \varepsilon|^{\frac{9}{4}}$. La rimozione di ogni vincolo su $\gamma \in \mathbb{R}$ e la successiva ottimizzazione dell'energia di vortice gigante rispetto a tale parametro effettuati nella nostra analisi vanno proprio nella direzione di calcolare le correzioni ottimali al valore $\lfloor \Omega \rfloor$.

Il nostro approccio vuole essere cioè più costruttivo: idealmente vorremmo trovare il più piccolo valore asintoticamente esatto della velocità angolare per il quale le stime dall'alto e dal basso dell'energia coincidano. Ovviamente questo richiederebbe la dimostrazione di un *lower bound* per l'energia che esula dallo scopo di questa tesi. Ci si aspetta infatti che non tanto dalla stima dall'alto (che non identificherà un valore soglia per Ω_0) quanto da quella dal basso possano comparire delle condizioni che determinino quale sia il valore critico di Ω_0, sotto il quale la stima dall'alto benché valida non

[2] Ricordiamo che $\deg(f, \partial B_R(\boldsymbol{x}_0))$ indica il grado topologico di una funzione attorno ad un punto $\boldsymbol{x}_0$ e rappresenta il numero di "avvolgimenti" della funzione attorno a $\boldsymbol{x}_0$. Più precisamente, se $f \neq 0$ su $\partial B_R(\boldsymbol{x}_0))$ allora

$$\deg(f, \partial B_R(\boldsymbol{x_0})) = -\frac{i}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\boldsymbol{x_0})} d\sigma \ \frac{|f|}{f} \ \frac{\partial}{\partial_r} \left(\frac{f}{|f|}\right).$$

sarà più significativa. Ci si aspetta inoltre che tale valore critico identifichi univocamente la terza velocità angolare critica Ω_{c_3}.

Concludiamo questa parte sottolineando il fatto che per $\Omega_{\mathrm{rot}} \gg \Omega_{c_3}$ il condensato non va più incontro ad ulteriori transizioni di fase e che, anche se si potrebbe pensare che il condensato a questo punto abbia riacquistato la
tazioni, per simmetria sua
$|\log \varepsilon|$ nessun minimizzatore di $\mathcal{E}^{\mathrm{GP}}_{\mathrm{fis}}$ è autostato dell'operatore momento (in particolare si veda il Teorema **1.6**).

CAPITOLO 4

Contributi Originali: Ottimizzazione di E^{gv}

4.1 Risultati principali

Fissiamo da adesso in poi il raggio del nostro anello come $\varepsilon^2\eta$ con $\eta = \frac{\eta_0}{2\sqrt{\Omega_0}}|\log\varepsilon|$ dove $\eta_0 > 0$ è un numero arbitrariamente grande ma indipendente da ε; allora l'anello considerato sarà

$$A_\eta := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2,\ |1 - \boldsymbol{x}| \le \varepsilon^2\eta \right\}.$$

Infatti la Proposizione 3.1 in [CPRY3] ci garantisce che

$$\left|\psi^{\mathrm{GP}}(\boldsymbol{r})\right|^2 \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}\eta_0 - 2}$$

per $\boldsymbol{r}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus A_\eta$ e quindi, prendendo η_0 grande a piacere, il minimizzatore di Gross-Pitaevskii sia esponenzialmente piccolo al di fuori della corona. Di conseguenza la massa del condensato è concentrata in A_η così come la sua energia. Il problema che inizialmente minimizziamo è dunque della forma

$$\mathcal{E}^{\mathrm{2d}}_\delta[f] = \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla} f|^2 + \Omega^2 U_\delta(x) f^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f^4 \right\}$$

con

$$U_\delta(x) := \frac{1}{2}\left(x^2 - 1 - \frac{\delta}{\Omega} \right)^2 + \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2}$$

ma, dopo successivi riscalamenti e traslazioni, arriviamo al problema effettivo di minimizzazione di

$$\mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_\beta[g] := \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1 + \varepsilon^2 y)\ \left\{ \frac{1}{2}[g']^2 + \left(W_\beta(y) + \varepsilon^2 u(y) \right) g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4 \right\}$$

con W_β e u definite come

$$W_\beta := \frac{1}{2(1 + \varepsilon^2 y)^2} \left(\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2 \beta y + \frac{\alpha^4 \beta^2}{4\Omega_0^2} - \varepsilon^2 \alpha^2 \beta y \right),$$

$$u(y) = \frac{\alpha^2(\alpha^2 - \Omega_0^2)y^3}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} + \frac{(\alpha^2 - 3\Omega_0^2)(2\alpha^2 - 5\Omega_0^2)\varepsilon^2 y^4}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} + \\ + \frac{(\alpha^2 - 3\Omega_0^2)(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)\varepsilon^4 y^5}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^6}\varphi(1+\varepsilon^2 y)$$

sul dominio

$$\mathcal{D}_\beta^{\mathrm{gv}} := \left\{ g \in H_\eta^1 : \; g = g^*, \; \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y) g^2 = 1 \right\}.$$

Inoltre β è a sua volta un riscalamento di δ dato da

$$\beta := \frac{2\delta\varepsilon^2}{\Omega_0(s+2)}$$

e α è un parametro dato da

$$\alpha^2 = \Omega_0^2(s+2).$$

Ora studiamo la minimizzazione di E_β^{gv} e dimostriamo il primo risultato importante.

Teorema 4.1.1. *Esiste un unico valore β_* di minimo per E_β^{gv}; esso è tale che se definiamo*

$$V = \frac{1}{2}\alpha^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; y^2 g_{\beta_*}^2, \qquad Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; g_{\beta_*}^4,$$

allora

$$\boxed{\beta_* = -\varepsilon^2 \frac{4}{\Omega_0^2(s^2-4)} \left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]}$$

e il corrispondente valore δ_* è tale che

$$\boxed{\delta_* = -\frac{2}{\Omega_0(s-2)} \left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right].}$$

A questo punto le correzioni legate a β_* in $\mathcal{E}_\beta^{\mathrm{gv}}$ sono dell'ordine di ε^2 quindi, almeno formalmente, ci aspetteremmo che il problema di riferimento fosse determinato dalla minimizzazione del funzionale

$$\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}[g] := \int_{\mathbb{R}} dy \left\{ \frac{1}{2}[g']^2 + \frac{\alpha^2}{2} y^2 g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4 \right\}$$

ottenuto da $\mathcal{E}_{\beta_*}^{\mathrm{gv}}$ nel limite $\varepsilon \to 0$. Questo problema non dipende più da ε e con stime dall'alto e dal basso sul relativo minimizzatore possiamo notare che la sua massa è concentrata effettivamente in A_η.

Se allora definiamo

$$E^{\lim} := \inf_{\|g\|_2=1} \mathcal{E}^{\lim}[g]$$

riusciamo a dimostrare il seguente Teorema che mette il problema β-dipendente in relazione con il problema limite.

Teorema 4.1.2. *Nel limite $\varepsilon \to 0$ si ha*

$$\boxed{E_*^{\mathrm{gv}} = E^{\lim} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4 |\log \varepsilon|^7\right).}$$

Da questo Teorema seguono anche le seguenti Proposizioni.

Proposizione 4.1.3. *Se g_* e $g_{\lim}$ sono minimizzatori di E_*^{gv} e $E^{\lim}$ rispettivamente allora si ha che*

$$\left\| g_*^2 - g_{\lim}^2 \right\|_{L^2_\eta} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^{\frac{7}{2}}\right)$$

ed inoltre per ogni ν positivo limitato e indipendente da ε

$$\|g_* - g_{\lim}\|_{L^\infty(\hat{A})} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^{4+2\nu}\right)$$

con

$$\hat{A} := \left\{ y \in \mathbb{R} : \; g_{\lim}(y) \geq \frac{1}{\eta^\nu} \right\}.$$

Si noti che i risultati dell'ultima Proposizione permettono di calcolare le quantità V e Q che comparivano nel Teorema **4.1.1** in termini di $g_{\lim}$ (si veda anche la sezione **5.7.2**). Inoltre, grazie alle stesse stime appena enunciate, riusciamo a mostrare che il segno di δ_* è negativo per α sufficientemente grande, che è il contenuto della seguente Proposizione.

Proposizione 4.1.4. *Si ha che*

$$\delta_* \leq -\frac{2\|g_{\lim}\|_4^4}{\Omega_0(s-2)} \left[(s-2)\sqrt{2\alpha\pi} - \frac{1}{2\pi} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^{\frac{7}{2}}\right) \right]$$

e dunque per $\alpha > \overline{\alpha}$ con

$$\overline{\alpha} := \frac{1}{(2\pi)^3 (s-2)^2}$$

il segno di δ_* è ben definito ed è negativo.

Concludiamo usando la forma particolare di δ_* per ottenere la stima su E_Ω^{GP}, che rappresenta un altro risultato importante nonché risultato finale di questa tesi.

Teorema 4.1.5. *Se δ_* è come sopra e δ_ε è tale che*

$$\lfloor \Omega + \delta_* \rfloor = \lfloor \Omega + \delta_* + \delta_\varepsilon \rfloor = \Omega + \delta_* + \delta_\varepsilon$$

allora si ha che

$$\boxed{E_\Omega^{\mathrm{GP}} \leq \frac{1}{\varepsilon^4} E_*^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{2}\delta_\varepsilon^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4\right).}$$

4.2 Commenti

La prima osservazione rilevante è che la correzione ottenuta per la stima dall'alto è migliore di quanto ottenuto in [CPRY3]; infatti la stima contenuta nello stesso articolo è espressa nel seguente teorema (Teorema **1.6**).

Teorema (CPRY). *Esiste $\overline{\Omega}_0 > 0$ tale che se $\Omega_0 > \overline{\Omega}_0$ allora*

$$E_\Omega^{\mathrm{GP}} = \frac{1}{\varepsilon^4} E^{\mathrm{gv}} + \mathcal{O}\left(|\log \varepsilon|^{\frac{9}{2}}\right).$$

È evidente che non solo la convergenza è migliore ma il risultato qui illustrato vale per ogni Ω_0 arbitrario; chiaramente per un risultato effettivamente migliore serve anche una stima dal basso.

Inoltre, se notiamo che la velocità di rotazione è dell'ordine di $\frac{1}{\varepsilon^4}$ e che invece $\delta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ allora per una successione opportuna di ε_k si avrà che i corrispondenti valori δ_{ε_k} saranno nulli, migliorando ancora l'*upper bound* per E_Ω^{GP} e ottenendo (dato che possiamo scegliere η_0 arbitrariamente grande)

$$E_\Omega^{\mathrm{GP}} \leq \frac{1}{\varepsilon_k^4} E_*^{\mathrm{gv}} + \mathcal{O}\left(\varepsilon_k^\infty\right).$$

Invece il fatto che il segno di δ_* sia definitivamente negativo è fisicamente realistico in quanto ci dice che il condensato ruota ad una velocità minore della velocità che cerchiamo di imporgli.

Infine vale la pena di notare che se $\Omega_0 \to +\infty$ allora $\delta_* \to 0$, il che ci dice che il risultato ottenuto in [CPRY3] è ottimale nel regime di Ω_0 grande.

4.3 *Lower bound* e prospettive

Il passo successivo è cercare un *lower bound* per l'energia che riproduca la stima che abbiamo già ottenuto dall'alto. Nella ricerca dell'*upper bound* l'idea è stata di usare una funzione test che avesse un profilo ricostruito a partire dalla funzione g_{β_*} con una fase dell'ordine di $\Omega + \delta_*$.

Questo stesso ansatz dovrebbe essere il punto di partenza per la ricerca di un corrispondente *lower bound*, dove dovrebbero emergere le condizioni da imporre su Ω_0 per ottenere una transizione di fase allo stato di vortice gigante.

Il passo finale sarebbe mostrare che questo valore critico di Ω_0 è ottimale, e per poter fare questo bisognerebbe mostrare che se Ω_0 è più piccolo del valore critico vi è la presenza di vortici nell'anello contenente la massa, ma in questa prospettiva l'approccio da noi adottato non può essere di aiuto.

CAPITOLO 5

Dimostrazione dei risultati

$$\mathcal{E}_\alpha[f] := \int_{\mathbb{R}} dx\{\frac{1}{2}|f'|^2+\frac{1}{2}x^2f^2+\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}}f^4\}, H(\alpha) := E_\alpha+\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}}(\|f_\alpha\|_4^4-\|f_\alpha\|_\infty^2)$$

5.1 Introduzione di $\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}$

Nel contesto nel quale opereremo da ora in poi avremo

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon^4}.$$

Introduciamo dunque il **funzionale di *Giant Vortex* ristretto**:

$$\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f] := \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2}|\boldsymbol{\nabla} f|^2 + \Omega^2 U_\delta(x)|f|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|f|^4 \right\} \tag{5.1}$$

dove

$$U_\delta(x) := \frac{1}{2}\left(\left(1 - x^2\right) + \frac{\delta}{\Omega} \right)^2 \frac{1}{x^2} + \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2},$$

$$A_\eta := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ |\boldsymbol{x} - 1| \leq \varepsilon^2 \eta \right\}, \ \eta := \frac{\eta_0}{\sqrt{\Omega_0}} |\log \varepsilon|.$$

Mostriamo innanzitutto che il funzionale ammette un unico minimo su di un dominio opportuno. Affinché il problema resti coerente con il problema di minimizzazione di Gross-Pitaevskii, il dominio naturale per $fe^{i(\Omega+\delta)\theta}$ è

$$\mathcal{D}_\Omega^{\mathrm{GP}} = \left\{ \psi \in H^1(\mathbb{R}^2) : \ \|\psi\|_2^2 = 1 \right\}$$

e di conseguenza il dominio per f è

$$\mathcal{D}^{\mathrm{gv}} := \left\{ fe^{i(\Omega+\delta)\theta} \in \mathcal{D}_\Omega^{\mathrm{GP}}, \ f = f^* \right\}.$$

Dato che il nostro problema si svolge in A_η restringiamo il dominio di integrazione e otteniamo il dominio effettivo sul quale si svolgerà la nostra minimizzazione.

5.1.1 Minimizzazione di $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$

Proposizione 5.1.1. *Sia $\mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}$ definito come*

$$\mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}} := \left\{ f e^{i(\Omega+\delta)\theta} \in H^1(A_\eta) : \ f = f^*, \ \|f\|_2^2 = 1 \right\}.$$

Allora il funzionale $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ ammette su $\mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}$ un unico minimizzatore f_δ tale che

$$E_\delta^{2\mathrm{d}} := \inf_{f \in \mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}} \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] = \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f_\delta]$$

che può essere scelto strettamente positivo. Tale minimizzatore soddisfa l'equazione variazionale

$$-\frac{1}{2}\Delta f_\delta + \Omega^2 U_\delta f_\delta + \frac{2}{\varepsilon^2} f_\delta^3 = \mu_\delta f_\delta \tag{5.2}$$

con condizioni di Neumann al bordo. μ_δ si dice potenziale chimico ed è tale che $\mu_\delta = E_\delta^{2\mathrm{d}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|f_\delta\|_{L^4(A_\eta)}^4$. Inoltre la funzione f_δ è in $C^\infty(A_\eta)$ e soddisfa la (5.2) in senso classico.

Dimostrazione. Consideriamo dunque $E_\delta^{2\mathrm{d}}$ e mostriamo che è raggiunto. Cominciamo con il mostrare nel seguente lemma che il funzionale dato da $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ è convesso nel quadrato di f.

Lemma 5.1.2. *Se consideriamo $\mathcal{F}[\rho] := \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[\sqrt{\rho}]$ con ρ reale e tale che $\sqrt{\rho} \in \mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}$, allora questo è un funzionale* **strettamente convesso** *in ρ cioè*

$$\forall \rho_1, \ \rho_2 \text{ reali tali che } \sqrt{\rho_1}, \ \sqrt{\rho_2} \in \mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}, \ \rho_1 \neq \rho_2, \ \forall \lambda \in (0,1):$$

$$\mathcal{F}\left[\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2\right] < \lambda\mathcal{F}[\rho_1] + (1-\lambda)\mathcal{F}[\rho_2].$$

Dimostrazione. Il funzionale $\mathcal{F}$ è della forma

$$\mathcal{F}[\rho] = \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \left\{ \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\sqrt{\rho}\right)\right]^2 + \Omega^2 U_\delta \rho + \frac{1}{\varepsilon^2}\rho^2 \right\}.$$

La convessità del secondo termine discende dalla sua linearità, mentre il terzo termine è chiaramente strettamente convesso; se dunque il primo termine è convesso, tutto il funzionale è strettamente convesso.

Andiamo a considerare allora $\rho = \psi^2$, $\rho_1 = \psi_1^2$ e $\rho_2 = \psi_2^2$ con $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$. In questo caso abbiamo

$$\psi\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2\right) = \lambda\psi_1\boldsymbol{\nabla}\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2\boldsymbol{\nabla}\psi_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2}\sqrt{\lambda\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_1\right]^2 + (1-\lambda)\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_2\right]^2} =$$

$$= \psi\sqrt{\lambda\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_1\right]^2 + (1-\lambda)\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_2\right]^2}$$

dove per la prima disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Se semplifichiamo ψ otteniamo

$$\left[\boldsymbol{\nabla}\psi\right]^2 \leq \lambda\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_1\right]^2 + (1-\lambda)\left[\boldsymbol{\nabla}\psi_2\right]^2$$

che espressa in termini di ρ, ρ_1 e ρ_2 ci dà la convessità del primo termine.

$\square$

Consideriamo ora una successione $\{f_n\}$ minimizzante, cioè tale che

$$\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f_n] \to E_\delta^{2\mathrm{d}}$$

allora dalla finitezza[1] di $E_\delta^{2\mathrm{d}}$ abbiamo che la successione è limitata nella norma $\|\nabla\cdot\|_2$. Dal fatto che $\|f_n\|_2 = 1$, allora la successione è limitata anche in H^1. Dato che ora la successione è limitata in L^4 e in $L^2\left(A_\eta, \Omega^2 U_\delta \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)$ allora a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che esista f tale che $f_n \rightharpoonup f$ in tutti gli spazi sopraelencati[2]. Notiamo ora però che $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f_n]$ non è altro che la somma di norme degli spazi sopraelencati, e dato che le norme sono debolmente semicontinue inferiormente abbiamo che

$$\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] \leq \liminf \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f_n] = E_\delta^{2\mathrm{d}}.$$

Mostriamo ora che $\|f\|_2 = 1$. Questo discende dal fatto che se $f_n \rightharpoonup f$ in H^1 allora $f_n \to f$ in L^2. Questo ci dice che $1 = \|f_n\|_2 \to \|f\|_2 = 1$ da cui deduciamo che f è in $\mathcal{D}_\delta^{2\mathrm{d}}$ e dunque

$$E_\delta^{2\mathrm{d}} \leq \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] \leq E_\delta^{2\mathrm{d}} \Rightarrow \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] = E_\delta^{2\mathrm{d}}$$

e l'estremo inferiore è raggiunto.

A questo punto ogni minimo di $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ soddisfa in senso debole l'equazione variazionale

$$-\frac{1}{2}\Delta f + \Omega^2 U_\delta f + \frac{2}{\varepsilon^2} f^3 = \mu_\delta f$$

[1] Per la finitezza di $E_\delta^{2\mathrm{d}}$ basta notare che esistono delle funzioni test sulle quali $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ ha un valore finito, ad esempio una qualsiasi funzione regolare a decrescita rapida.

[2] Notiamo che qui la riflessività di $L^2\left(A_\eta, \Omega^2 U_\delta \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)$ deriva dalla positività di U_δ.

con condizioni di Neumann al bordo; il valore del potenziale chimico μ_δ si trova facilmente integrando contro f

$$\mu_\delta = \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mu_\delta f^2 = \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{ -\frac{1}{2}\Delta f + \Omega^2 U_\delta f + \frac{2}{\varepsilon^2} f^3 \right\} f =$$

$$= \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2} [\boldsymbol{\nabla} f]^2 + \Omega^2 U_\delta f^2 + \frac{2}{\varepsilon^2} f^4 \right\} = E_\delta^{2\mathrm{d}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f_\delta\|_4^4.$$

Vogliamo mostrare ora l'unicità del minimo.

Notiamo innanzitutto che se f è di minimo per $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ allora anche $|f|$ lo è; infatti dalla disuguaglianza diamagnetica (vedere ad esempio **[7.21]** di [LL]) abbiamo che

$$\int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, [\boldsymbol{\nabla} f]^2 \geq \int_{A_\eta} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, [\boldsymbol{\nabla} |f|]^2$$

e dunque, dato che i termini non cinetici dell'energia dipendono solamente dal modulo di $|f|$, abbiamo

$$E_\delta^{2\mathrm{d}} = \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] \geq \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[|f|] \geq E_\delta^{2\mathrm{d}} \Rightarrow \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[|f|] = \mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}[f] = E_\delta^{2\mathrm{d}}.$$

Il lemma mostrato precedentemente ci dice che $\rho = |f|^2$ è unico, e dunque adesso abbiamo che $|f|$ è autovettore positivo di

$$H := -\frac{1}{2}\Delta + \Omega^2 U_\delta + \frac{2}{\varepsilon^2}\rho$$

con autovalore dato dal potenziale chimico.

A questo punto il fatto che l'autofunzione sia positiva ci dice che μ_δ è l'energia dello stato fondamentale di H, che è unico a meno di un segno (vedere **[11.8]** e **[11.9]** di [LL]).

Da questo possiamo dedurre che anche il minimo di $\mathcal{E}_\delta^{2\mathrm{d}}$ è unico a meno di un segno ed in particolare che, dato che se f è minimo anche $|f|$ lo è, possiamo scegliere $f = |f|$.

Per la regolarità della soluzione si applica un semplice processo di bootstrap; infatti dato che A_η è compatto usiamo l'informazione che f è in $L^2(A_\eta)$ per ottenere, grazie al Teorema **[10.2]** in [LL], che f è in $C^{0,\alpha}(A_\eta)$ per ogni $0 < \alpha < 1$.

A questo punto applichiamo il Teorema **[10.3]** in [LL] e iterando otteniamo che f_δ è in $C^\infty(A_\eta)$.

$\square$

Corollario 5.1.3. *L'unico minimizzatore positivo f_δ è radiale.*

Dimostrazione. Questo discende dal fatto che il minimizzatore è unico e dal fatto che l'energia è invariante per rotazioni. Se infatti consideriamo una rotazione R_φ in $\mathbb{R}^2$ di angolo φ, chiamando $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) := f_\delta(R_\varphi \boldsymbol{x})$ si ha

$$\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[\tilde{f}] = \mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f_\delta] = E_\delta^{\mathrm{2d}}$$

e dunque, dall'unicità del minimo, f_δ è invariante per rotazioni e quindi radiale.

$\square$

Osservazione. Dalla Proposizione e dal Corollario precedenti discende che possiamo scegliere equivalentemente come dominio di minimizzazione l'insieme

$$\mathcal{D}_\delta^{\mathrm{2d}} := \left\{ f \in H^1(A_\eta) : \ f = f^* \geq 0, \ f \text{ radiale}, \ \|f\|_2^2 = 1 \right\}.$$

5.2 Da $\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}$ a $\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\mathrm{gv}}$

Dato che abbiamo visto che il minimizzatore di $\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}$ è in realtà radiale possiamo passare in coordinate polari, e in questo caso la (5.1) diventa

$$\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f] := 2\pi \int_{1-\varepsilon^2\eta}^{1+\varepsilon^2\eta} \mathrm{d}x \; x \left\{ \frac{1}{2}(f')^2 + \Omega^2 U_\delta(x) f^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} f^4 \right\}.$$

Adesso applichiamo il cambio di variabili dato da

$$y := \frac{x-1}{\varepsilon^2}.$$

La misura di integrazione diventa dunque della forma $2\pi x \mathrm{d}x = 2\pi\varepsilon^2(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y$. Allora riscriviamo la (5.1) come

$$\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f] = 2\pi\varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y) \; \left\{ \frac{1}{2}[f'(x)]^2 + \Omega^2 U_\delta(x) f^2(x) + \frac{1}{\varepsilon^2} f^4(x) \right\}.$$

Possiamo ora definire una nuova funzione g che ci permetta di capire meglio l'andamento del minimizzatore intorno a $x = 1$, cioè un riscalamento di f del tipo

$$g(y) := C f(1+\varepsilon^2 y).$$

La normalizzazione di f ci dá

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ |g|^2 = C^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ |f(1+\varepsilon^2 y)|^2 =$$

$$= \frac{C^2}{2\pi\varepsilon^2} \int_{A_\eta} d\boldsymbol{x} |f|^2 = \frac{C^2}{2\pi\varepsilon^2}.$$

Se allora $C = \sqrt{2\pi}\varepsilon$, cioè

$$g(y) = \sqrt{2\pi}\varepsilon f(1+\varepsilon^2 y), \tag{5.3}$$

anche g è normalizzato a 1 in $L^2\big((-\eta,\eta),(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\big)$. A questo punto abbiamo che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right|^2 = \left|\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial y} f(1+\varepsilon^2 y)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^4}\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} g(y)\right)\right|^2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon^6}\left|\frac{\partial g}{\partial y}(y)\right|^2$$

e se riscriviamo il funzionale (5.1) facendo uso di g otteniamo

$$\mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f] = 2\pi\varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon^6}[g']^2 + \right.$$

$$\left. + \Omega^2 U_\delta(1+\varepsilon^2 y)\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} g^2 + \frac{1}{4\pi^2\varepsilon^6} g^4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{1}{2}[g']^2 + \varepsilon^4\Omega^2 U_\delta(1+\varepsilon^2 y) g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4\right\}.$$

Definiamo allora

$$\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\mathrm{gv}}[g] := \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{1}{2}[g']^2 + \varepsilon^4\Omega^2 U_\delta(1+\varepsilon^2 y) g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4\right\} \tag{5.4}$$

e in questo modo si ha $\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\mathrm{gv}}[g] = \varepsilon^4 \mathcal{E}_\delta^{\mathrm{2d}}[f]$.

Notazione. Per non appesantire la notazione definiamo

$$H^1_\eta := H^1\big((-\eta,\eta),(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\big)$$

$$L^p_\eta := L^p\big((-\eta,\eta),(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\big)$$

al variare di p in $[1,+\infty]$. Notiamo che data la stretta positività di $(1+\varepsilon^2 y)$ la teoria dell'integrazione di Lebesgue si replica perfettamente dandoci riflessività per gli spazi L^p_η e lo status di spazio di Hilbert per H^1_η e L^2_η. Denoteremo inoltre con $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ il prodotto interno in L^2_η.

5.2.1 Minimizzazione di $\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\rm gv}$

È chiaro che possiamo replicare i risultati già ottenuti per $\mathcal{E}_\delta^{\rm 2d}$ anche per questo funzionale, dunque vale la seguente proposizione:

Proposizione 5.2.1. *Sia $\hat{\mathcal{D}}_\delta^{\rm gv}$ definito come*

$$\hat{\mathcal{D}}_\delta^{\rm gv} := \left\{ g \in H_\eta^1 : \ g = g^*, \ \|g\|_{L_\eta^2}^2 = 1 \right\}.$$

Allora il funzionale $\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\rm gv}$ ammette su $\hat{\mathcal{D}}_\delta^{\rm gv}$ un unico minimizzatore g_δ tale che

$$\hat{E}_\delta^{\rm gv} := \inf_{g \in \hat{\mathcal{D}}_\delta^{\rm gv}} \hat{\mathcal{E}}_\delta^{\rm gv}[g] = \hat{\mathcal{E}}_\delta^{\rm gv}[g_\delta]$$

che può essere scelto strettamente positivo. Tale minimizzatore soddisfa l'equazione variazionale

$$-\frac{1}{2} g_\delta'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)} g_\delta' + \varepsilon^4 \Omega^2 U_\delta g_\delta + \frac{1}{\pi} g_\delta^3 = \hat{\mu}_\delta g_\delta, \tag{5.5}$$

con condizioni di Neumann al bordo. Come sopra, $\hat{\mu}_\delta$ si dice potenziale chimico del problema ed è tale che $\hat{\mu}_\delta = \hat{E}_\delta^{\rm gv} + \frac{1}{2\pi}\|g_\delta\|_{L_\eta^4}^4$. Inoltre la funzione g_δ è in $C^\infty(-\eta,\eta)$ e soddisfa la (5.5) in senso classico.

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca esattamente quella della Proposizione **5.1.1**, mentre per la regolarità della soluzione si procede nuovamente come sopra; infatti dato che $(-\eta,\eta)$ è compatto usando l'informazione iniziale che la soluzione è in $L^2(-\eta,\eta)$ otteniamo che dal Teorema [**10.2**] in [LL] g_δ è in $C^1(-\eta,\eta)$. A questo punto applichiamo il Teorema [**10.3**] sempre in [LL] e iterando otteniamo che g_δ è in $C^\infty(-\eta,\eta)$ e che l'equazione è quindi soddisfatta in senso classico.

□

Chiaramente, dato che si è operato cambiando variabili nel funzionale e riscalando la funzione, sussiste una relazione fra i due problemi in termini di minimi, minimizzatori e potenziali chimici. Possiamo enunciare cioè la seguente Proposizione.

Proposizione 5.2.2. *Valgono le seguenti uguaglianze:*

$$g_\delta(y) = \sqrt{2\pi}\varepsilon f_\delta(1+\varepsilon^2 y), \qquad \hat{E}_\delta^{\rm gv} = \varepsilon^4 E_\delta^{\rm 2d}, \qquad \hat{\mu}_\delta = \varepsilon^4 \mu_\delta.$$

Dimostrazione. L'uguaglianza fra i minimi delle energie deriva dall'uguaglianza delle energie mentre per i potenziali chimici basta usare l'uguaglianza delle energie e dei minimizzatori.

□

5.3 Passaggio da $\hat{\mathcal{E}}_{\delta}^{\mathrm{gv}}$ a $\mathcal{E}_{\beta}^{\mathrm{gv}}$

Studiamo ora il potenziale dato da $\varepsilon^4\Omega^2 U_\delta(1+\varepsilon^2 y)$. Se indichiamo con

$$\gamma_s(x) := \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2}$$

allora abbiamo che

$$U_\delta(x) = \frac{1}{2x^2}\left(\left(1 - x^2\right) + \frac{\delta\varepsilon^4}{\Omega_0}\right)^2 + \gamma_s(x),$$

$$U_\delta(1+\varepsilon^2 y) = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2\varepsilon^2 y + \varepsilon^4 y^2 - \frac{\delta\varepsilon^4}{\Omega_0}\right)^2 + \gamma_s(1+\varepsilon^2 y).$$

Se ora moltiplichiamo per $\varepsilon^4\Omega^2 = \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}$ otteniamo

$$\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4} U_\delta(1+\varepsilon^2 y) = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2\Omega_0 y + \Omega_0\varepsilon^2 y^2 - \delta\varepsilon^2\right)^2 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\gamma_s(1+\varepsilon^2 y).$$

Espandendo in **serie di Taylor** γ_s intorno a $x = 1$ otteniamo per $|x-1| \ll 1$ che

$$\gamma_s(x) = \frac{s-2}{2}(x-1)^2 + \frac{(s-2)(s-1)}{6}(x-1)^3 + \varphi(x)$$

con $\varphi(x) = \mathcal{O}\left(|x-1|^4\right)$ e quindi

$$\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\gamma_s(1+\varepsilon^2 y) = \frac{\Omega_0^2(s-2)}{2} y^2 + \frac{\Omega_0^2(s-2)(s-1)}{6}\varepsilon^2 y^3 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\varphi(1+\varepsilon^2 y).$$

Se ora sostituiamo questo valore in $\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4} U_\delta(1+\varepsilon^2 y)$ otteniamo

$$\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4} U_\delta(1+\varepsilon^2 y) = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2\Omega_0 y + \Omega_0\varepsilon^2 y^2 - \delta\varepsilon^2\right)^2 +$$

$$+ \frac{\Omega_0^2(s-2)}{2} y^2 + \frac{\Omega_0^2(s-2)(s-1)}{6}\varepsilon^2 y^3 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\varphi(1+\varepsilon^2 y) =$$

$$= \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2\Omega_0 y - \delta\varepsilon^2\right)^2 + \frac{\Omega_0\varepsilon^2 y^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\Omega_0\varepsilon^2 y^2 + 4\Omega_0 y - 2\delta\varepsilon^2\right) +$$
$$+\frac{\Omega_0^2(s-2)}{2}y^2 + \frac{\Omega_0^2(s-2)(s-1)}{6}\varepsilon^2 y^3 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\varphi(1+\varepsilon^2 y) =$$
$$= \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\Omega_0^2(s+2)y^2 - 4\Omega_0\delta\varepsilon^2 y + \delta^2\varepsilon^4\right) +$$
$$+\frac{\Omega_0\varepsilon^2 y^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\Omega_0\varepsilon^2 y^2 + 4\Omega_0 y - 2\delta\varepsilon^2\right) + \frac{\Omega_0^2(s-2)}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right)y^2 +$$
$$+\frac{\Omega_0^2(s-2)(s-1)}{6}\varepsilon^2 y^3 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\varphi(1+\varepsilon^2 y).$$

Arrivati a questo punto vogliamo ricostruire il quadrato e dunque definiamo

$$\alpha^2 := \Omega_0^2(s+2), \qquad \beta := \frac{2\Omega_0\delta\varepsilon^2}{\alpha^2}.$$

Usando α e β il potenziale diventa

$$\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}U_\delta(1+\varepsilon^2 y) = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2\beta y + \frac{\alpha^4\beta^2}{4\Omega_0^2}\right) +$$
$$+\frac{\Omega_0\varepsilon^2 y^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\Omega_0\varepsilon^2 y^2 + 4\Omega_0 y - \frac{\alpha^2\beta}{\Omega_0}\right) + \frac{(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)(2+\varepsilon^2 y)}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\varepsilon^2 y^3 +$$
$$+\frac{(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)(\alpha^2 - 3\Omega_0^2)}{6\Omega_0^2}\varepsilon^2 y^3 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}\varphi(1+\varepsilon^2 y).$$

Dato che abbiamo definito un nuovo parametro è logico introdurre un ulteriore funzionale effettivo (che sarà l'oggetto del nostro studio principale):

$$\mathcal{E}_\beta^{\mathrm{gv}}[g] := \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{1}{2}[g']^2 + W_\beta(y)g^2 + \varepsilon^2 u(y) g^2 + \frac{1}{2\pi}g^4\right\} \quad (5.6)$$

con W_β e u definiti come

$$W_\beta(y) := \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2\beta y + \frac{\alpha^4\beta^2}{4\Omega_0^2} - \varepsilon^2\alpha^2\beta y^2\right), \quad (5.7)$$

$$u(y) := \frac{\alpha^2(\alpha^2 - \Omega_0^2)y^3}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} + \frac{(\alpha^2 - 3\Omega_0^2)(2\alpha^2 - 5\Omega_0^2)\varepsilon^2 y^4}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} +$$
$$+ \frac{(\alpha^2 - 3\Omega_0^2)(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)\varepsilon^4 y^5}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2} + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^6}\varphi(1+\varepsilon^2 y). \quad (5.8)$$

5.3.1 Minimizzazione di $\mathcal{E}_\beta^{\rm gv}$

Chiaramente, dato che il funzionale non è effettivamente cambiato, vale lo stesso risultato che valeva per $\hat{\mathcal{E}}_\delta^{\rm gv}$.

Proposizione 5.3.1. *Sia $\mathcal{D}_\beta^{\rm gv}$ definito come*

$$\mathcal{D}_\beta^{\rm gv} := \left\{ g \in H_\eta^1 : \ g = g^*, \ \|g\|_{L_\eta^2}^2 = 1 \right\} = \hat{\mathcal{D}}_\delta^{\rm gv}.$$

Allora il funzionale $\mathcal{E}_\beta^{\rm gv}$ ammette su $\mathcal{D}_\beta^{\rm gv}$ un unico minimizzatore g_β tale che

$$E_\beta^{\rm gv} := \inf_{g \in \mathcal{D}_\beta^{\rm gv}} \mathcal{E}_\beta^{\rm gv}[g] = \mathcal{E}_\beta^{\rm gv}[g_\beta]$$

che può essere scelto strettamente positivo. Tale minimizzatore soddisfa l'equazione variazionale

$$-\frac{1}{2} g_\beta'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)} g_\beta' + W_\beta g_\beta + \varepsilon^2 u(y) g_\beta + \frac{1}{\pi} g_\beta^3 = \mu_\beta g_\beta. \tag{5.9}$$

con condizioni di Neumann al bordo. Come sopra, μ_β si dice potenziale chimico del problema ed è tale che $\mu_\beta = E_\beta^{\rm gv} + \frac{1}{2\pi}\|g_\beta\|_{L_\eta^4}^4$. Inoltre la funzione g_β è in $C^\infty(-\eta,\eta)$ e soddisfa la (5.9) *in senso classico.*

5.4 Stime

Nel seguito della trattazione ci serviranno delle stime a priori sul valore dei minimi delle energie e sul decadimento dei minimizzatori. Inoltre supporremo per il momento che si abbia $\beta = \mathcal{O}(1)$, condizione che, come poi vedremo, è soddisfatta da ogni β minimizzante.

5.4.1 Stime sul minimo dell'energia

Proposizione 5.4.1. *Se $\beta = \mathcal{O}(1)$ allora esiste una costante $\mathcal{K}$ indipendente da ε tale che $E_\delta^{\rm 2d} \leq \mathcal{K}\Omega$, $\hat{E}_\delta^{\rm gv} \leq \mathcal{K}$ e che $E_\beta^{\rm gv} \leq \mathcal{K}$.*

Dimostrazione. Alla luce delle relazioni reciproche fra le energie e i loro minimi, è chiaro che le tre stime sono equivalenti quindi è sufficiente mostrarne solo una; scegliamo di mostrare allora la terza. Ricordiamo da (5.7) che la forma di W_β è molto simile a quella di un potenziale armonico del tipo $\frac{\alpha^2}{2}(y-$

$\beta)^2$ dunque consideriamo come funzione test un'autofunzione dell'**oscillatore armonico traslato** dato da

$$H^{\text{osc}} := -\frac{1}{2}\partial_y^2 + \frac{1}{2}\alpha^2(y-\beta)^2.$$

Se consideriamo ora l'autofunzione relativa al ground state di H^{osc} di norma unitaria in L^2, questa è della forma

$$g_\alpha(y) := \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\frac{\alpha(y-\beta)^2}{2}}, \qquad H^{\text{osc}}g_\alpha = \frac{\alpha}{2}g_\alpha.$$

Usiamola come funzione test per l'energia; per essere tale deve essere normalizzata, dunque consideriamo $g_{\text{trial}} := Cg_\alpha$ con $C \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|g_{\text{trial}}\|^2_{L^2_\eta} = 1$. Allora

$$\begin{aligned}1 &= C^2\int_{-\eta}^{\eta}(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\ g_\alpha^2 = \\ &= C^2\left(1+o(1)\right)\left[1 - \int_\eta^{+\infty}\mathrm{d}y\ g_\alpha^2 - \int_{-\infty}^{-\eta}\mathrm{d}y\ g_\alpha^2\right] = \\ &= C^2\left(1+o(1)\right) \Rightarrow C^2 = 1+o(1).\end{aligned}$$

Sostituiamo allora nell'energia e otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\text{gv}}_\beta[g_{\text{trial}}] &= \int_{-\eta}^{\eta}(1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\left\{\frac{1}{2}|g'_{\text{trial}}|^2 + W_\beta(y)g^2_{\text{trial}} + \frac{1}{2\pi}g^4_{\text{trial}}\right\} = \\ &= (1+o(1))\left[\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left\{\frac{1}{2}|g'_{\text{trial}}|^2 + \frac{\alpha^2}{2}(y-\beta)^2 g^2_{\text{trial}}\right\} + \right. \\ &\left. + \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left(\frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2} - \frac{\alpha^2\beta}{2} - \varepsilon^2\alpha^2\beta y^2\right)g^2_{\text{trial}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y g^4_{\text{trial}}\right] = \\ &= (1+o(1))\left[C^2\left[\langle g_\alpha | H^{\text{osc}} | g_\alpha\rangle + o(1)\right] + \right. \\ &\left. + C^2\left(\frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2} - \frac{\alpha^2\beta}{2}\right) + \frac{C^4}{2\pi}\left(\|g_\alpha\|_4^4 + o(1)\right)\right] = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2} - \frac{\alpha^2\beta}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha}} + o(1).\end{aligned}$$

A questo punto se supponiamo che $\beta = \mathcal{O}(1)$ possiamo trovare una costante indipendente da ε per la quale valga la tesi, cioè abbiamo che

$$E^{\text{gv}}_\beta \le \mathcal{K}, \qquad \hat{E}^{\text{gv}}_\delta \le \mathcal{K},$$

e a meno di rinominare la costante

$$E_\delta^{\mathrm{2d}} = \frac{1}{\varepsilon^4} E_\beta^{\mathrm{gv}} \leq \mathcal{K}\Omega.$$

□

Corollario 5.4.2. *Se $\beta = \mathcal{O}(1)$ allora esiste una costante $\mathcal{K}$ indipendente da ε tale che*

$$\mu_\eta \leq \mathcal{K}\Omega, \qquad \mu_\delta \leq \mathcal{K}, \qquad \mu_\beta \leq \mathcal{K}.$$

Dimostrazione. Per ciascuno dei potenziali chimici abbiamo che vale

$$\mu_\delta = E_\delta^{\mathrm{2d}} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|f_\delta\|_4^4 \leq 2E_\delta^{\mathrm{2d}},$$

$$\hat{\mu}_\delta = \hat{E}_\delta^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{2\pi}\|g_\delta\|_{L_\eta^4}^4 \leq 2\hat{E}_\delta^{\mathrm{gv}},$$

$$\mu_\beta = E_\beta^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{2\pi}\|g_\beta\|_{L_\eta^4}^4 \leq 2E_\beta^{\mathrm{gv}},$$

ma allora dalla proposizione precedente possiamo ottenere il risultato.

□

5.4.2 Stime sul decadimento dei minimizzatori

Per arrivare ad avere una stima di decadimento illustriamo prima una (più rozza) stima sul valore assoluto dei minimizzatori.

Proposizione 5.4.3. *Siano f_δ, g_δ, g_β i minimizzatori dei rispettivi funzionali. Supponiamo $\beta = \mathcal{O}(1)$, allora valgono le seguenti:*

$$\|f_\delta\|_\infty^2 = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\Omega\right), \qquad \|g_\delta\|_\infty^2 = \mathcal{O}(1), \qquad \|g_\beta\|_\infty^2 = \mathcal{O}(1).$$

Dimostrazione. Dal fatto che la f_δ soddisfa la (5.2) e dalla positività del potenziale U_δ otteniamo che

$$-\frac{1}{2}\Delta f_\delta = \mu_\delta f_\delta - \Omega^2 U_\delta f_\delta - \frac{2}{\varepsilon^2} f_\delta^3 \leq \left(\mu_\delta - \frac{2}{\varepsilon^2} f_\delta^2\right) f_\delta.$$

Sia ora $\overline{\boldsymbol{x}}$ punto di massimo per f_δ. Allora per la regolarità di f abbiamo che $\Delta f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq 0$ e per la positività di f_δ

$$f_\delta^2(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq \mu_\delta \frac{\varepsilon^2}{2} \Rightarrow \|f_\delta\|_\infty^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2\Omega).$$

Le altre stime seguono dalle relazioni reciproche fra i minimizzatori.

□

5.4.3 Decadimento delle code

Proposizione 5.4.4. *Se $\beta = \mathcal{O}(1)$ esiste una costante C indipendente da ε tale che*

$$f_\delta(x) \le \frac{C}{\varepsilon} e^{-\sqrt{\Omega}|x^2-1|}, \qquad g_\delta(y) \le C e^{-2\sqrt{\Omega_o}|y|}, \qquad g_\beta(y) \le C e^{-2\sqrt{\Omega_o}|y|}.$$

Dimostrazione. Fissiamo inizialmente $0 < a < \eta$ e restringiamo l'attenzione alla regione[3]

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(1 - a\varepsilon^2) \cap A_\eta = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 - \eta\varepsilon^2 \le x \le 1 - a\varepsilon^2 \right\}.$$

Sappiamo che in B f_δ è soluzione della (5.2). Abbiamo che

$$U_\delta(x) \ge \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(s-2)(x-1)^2 + \mathcal{O}\left(|x-1|^3\right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}(s-2)a^2\varepsilon^4 + \mathcal{O}\left(a^3\varepsilon^6\right) \ge C_0 a^2 \varepsilon^4$$

con $C_0 > 0$ scelta opportunamente.

A questo punto abbiamo che la (5.2) e le informazioni del Corollario 5.4.2 ci danno

$$-\frac{1}{2}\Delta f = \mu_\delta f_\delta - \Omega^2 U_\delta f_\delta - \frac{2}{\varepsilon^2} f_\delta^3 \le \left[\mu_\delta - C_0 a^2 \Omega^2 \varepsilon^4\right] f_\delta \le$$
$$\le \left[C_1 \Omega - C_0 a^2 \Omega^2 \varepsilon^4\right] f_\delta = \left[C_1 - C_0 a^2 \Omega_0\right] \Omega f_\delta$$

con $C_1 > 0$ opportuno.

Ora se scegliamo $a \ge \sqrt{\dfrac{2C_1}{C_0 \Omega_0}}$ abbiamo

$$C_1 - C_0 a^2 \Omega_0 \le -\frac{1}{2} C_0 a^2 \Omega_0$$

e dunque f_δ è sottosoluzione del problema

$$-\frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{2} C_0 a^2 \Omega^2 \varepsilon^4 f = 0.$$

Per poter applicare ora il criterio del massimo in forma debole estendiamo la funzione ad una definita su tutta la palla $\mathcal{B}(1 - a\varepsilon^2)$. Per fare questo notiamo che la funzione definita come

$$r(x) := f_\delta(1 - \eta\varepsilon^2) \left(\frac{x - \left(1 - 2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2} \right)^{ka^2}$$

[3] $\mathcal{B}(r)$ con $r > 0$ è la palla di raggio r centrata nell'origine.

con $k>0$ è sottosoluzione dello stesso problema in $\mathcal{B}(1-\eta\varepsilon^2)\setminus\mathcal{B}(1-2\eta\varepsilon^2)$ se k è sufficiente grande; infatti

$$-\frac{1}{2}\Delta r(x)+\frac{1}{2}C_0a^2\Omega^2\varepsilon^4 r(x)=-\frac{1}{2}r''(x)-\frac{1}{2x}r'(x)+\frac{1}{2}C_0a^2\Omega^2\varepsilon^4 r(x)=$$

$$=-\frac{1}{2}f_\delta(1-\eta\varepsilon^2)\left[\frac{ka^2(ka^2-1)}{\eta^2\varepsilon^4}\left(\frac{x-\left(1-2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2}\right)^{ka^2-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{ka^2}{x\ \eta\varepsilon^2}\left(\frac{x-\left(1-2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2}\right)^{ka^2-1}-C_0a^2\Omega^2\varepsilon^4\left(\frac{x-\left(1-2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2}\right)^{ka^2}\right]\leq$$

$$\leq-\frac{a^2}{\eta^2\varepsilon^4}f_\delta(1-\eta\varepsilon^2)\left(\frac{x-\left(1-2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2}\right)^{ka^2-2}\cdot$$

$$\cdot\left[k(ka^2-1)-C_0\Omega_0^2\eta^2\left(\frac{x-\left(1-2\eta\varepsilon^2\right)}{\eta\varepsilon^2}\right)^2\right]\leq 0$$

per $k\geq\dfrac{1}{2a^2}\left(1+\sqrt{1+4C_0a^2\Omega_0^2\eta^2}\right)$. Se allora definiamo

$$\tilde{f}_\delta(x):=\begin{cases}f_\delta(x), & 1-\eta\varepsilon^2\leq x\leq 1-a\varepsilon^2,\\ r(x), & 1-2\eta\varepsilon^2\leq x\leq 1-\eta\varepsilon^2,\\ 0, & 0\leq x\leq 1-2\eta\varepsilon^2,\end{cases}$$

questo è un prolungamento di f_δ che è ancora sottosoluzione del problema.

Esibiamo ora una soprasoluzione dello stesso problema per poi dedurne una stima su $\tilde{f}_\delta$. Sia

$$f_{\rm sup}(x):=C_a\|f_\delta\|_\infty e^{-\sqrt{\Omega}(1-x^2)}.$$

Mostriamo che è effettivamente soprasoluzione. Calcoliamo innanzitutto il laplaciano:

$$-\frac{1}{2}\Delta f_{\rm sup}=-\frac{1}{2}f''_{\rm sup}-\frac{1}{2x}f'_{\rm sup}=$$

$$=-2C_a\|f_\delta\|_\infty\sqrt{\Omega}e^{-\sqrt{\Omega}(1-x^2)}\left(1+\sqrt{\Omega}x^2\right)=-2\sqrt{\Omega}\left(1+\sqrt{\Omega}x^2\right)f_{\rm sup}.$$

Affinché $f_{\rm sup}$ sia soprasoluzione imponiamo che

$$-\frac{1}{2}\Delta f_{\rm sup}+\frac{1}{2}C_0a^2\Omega^2\varepsilon^4 f_{\rm sup}=\frac{1}{2}\left(-2\sqrt{\Omega}-2\Omega x^2+C_0\Omega_0a^2\Omega\right)f_{\rm sup}\geq$$

$$\geq\frac{\sqrt{\Omega}}{2}\left(C_0\Omega_0a^2\sqrt{\Omega}-2-2\sqrt{\Omega}\right)f_{\rm sup}>0,$$

condizione soddisfatta scegliendo $a > \frac{2}{C_0\Omega_0}$. Notiamo che questa condizione non è in contraddizione con la precedente perché ci dice solo che a deve essere preso sufficientemente grande. A questo punto abbiamo ancora l'arbitrarietà su C_a e la usiamo per imporre le condizioni al contorno. Volendo applicare il principio del massimo vogliamo che $f_{\text{sup}} \geq \tilde{f}_\delta$ su $\partial\mathcal{B}(1-a\varepsilon^2)$.

Abbiamo che

$$f_{\text{sup}}(x)|_{\partial\mathcal{B}(1-a\varepsilon^2)} = f_{\text{sup}}(1-a\varepsilon^2) = C_a\|f_\delta\|_\infty e^{-\sqrt{\Omega}\left(1-\left(1-a\varepsilon^2\right)^2\right)} =$$

$$= C_a\|f_\delta\|_\infty e^{-a\sqrt{\Omega_0}\left(2-a\varepsilon^2\right)}.$$

Se allora $C_a > e^{2a\sqrt{\Omega_0}}$ possiamo applicare il principio del massimo, e dal fatto che $f_{\text{sup}} \geq f_\delta$ su $\partial\mathcal{B}(1-a\varepsilon^2)$ dedurre che $f_{\text{sup}} \geq f_\delta$ in tutta $\mathcal{B}(1-a\varepsilon^2)$. Inoltre abbiamo che $f_{\text{sup}}(1-a\varepsilon^2) > \|f_\delta\|_\infty$ e quindi la monotonia di f_{sup} ci permette di vedere che

$$f_{\text{sup}}(x) \geq \|f_\delta\|_\infty \geq f_\delta(x)$$

anche in $\mathcal{B}(1) \setminus \mathcal{B}(1-a\varepsilon^2)$. Dalla Proposizione **5.4.3** concludiamo che in $\mathcal{B}(1) \cap A_\eta$ si ha

$$f_\delta(x) \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\sqrt{\Omega}(1-x^2)}.$$

Per avere il risultato in $\mathcal{B}(1+a\varepsilon^2)^c \cap A_\eta = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 :\ 1+a\varepsilon^2 \leq x \leq 1+\eta\varepsilon^2\right\}$ basta considerare come funzione test

$$f_{\text{sup}}(x) := C_a\|f_\delta\|_\infty e^{-\sqrt{\Omega}(x^2-1)}$$

con il prolungamento di f_δ dato da

$$r(x) := f_\delta(1+\eta\varepsilon^2)\left(\frac{\left(1+2\eta\varepsilon^2\right)-x}{\eta\varepsilon^2}\right)^{ka^2}$$

e così ottenere la tesi.

$\square$

Corollario 5.4.5. *Se $\beta = \mathcal{O}(1)$ allora*

$$f_\delta\left(1 \pm \varepsilon^2\eta\right) = g_\delta\left(\pm\eta\right) = g_\beta\left(\pm\eta\right) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\eta_0}\right).$$

5.5 Ottimizzazione della fase

Passiamo ora a cercare un valore β_* tale che il ground state corrispondente sia minimo cioè tale che

$$E^{\mathrm{gv}}_{\beta_*} = \inf_{\beta\in\mathbb{R}} E^{\mathrm{gv}}_{\beta}.$$

Dato che E^{gv}_{β} è funzione reale di variabile reale come funzione di β se fosse continua e derivabile in β potremmo chiederci (al fine di trovare un β_* minimale) dove si annulli la derivata di E^{gv}_{β} cioè se esiste β_* tale che

$$\partial_\beta E^{\mathrm{gv}}_{\beta}\Big|_{\beta=\beta_*} = 0.$$

Mostriamo innanzitutto la derivabilità di g_β rispetto a β nella seguente proposizione.

Proposizione 5.5.1. *Consideriamo*

$$F(\beta, g) := -\frac{1}{2}g'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}g' + W_\beta g + \varepsilon^2 u g + \frac{1}{\pi}g^3 - \mu_\beta g.$$

allora l'applicazione $\beta \mapsto g_\beta$ è derivabile infinite volte con derivate continue ed è tale che $F(\beta, g_\beta) = 0$.

Dimostrazione. L'affermazione della proposizione non è altro che un'applicazione del teorema della funzione implicita.

Fissiamo β_0 e mostriamo che g_{β_0} è derivabile in β_0.

Studiamo la derivata di Fréchet di F: abbiamo

$$F(\beta, g+h) - F(\beta, g) =$$

$$= -\frac{1}{2}h'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}h' + W_\beta h + \varepsilon^2 u h + \frac{1}{\pi}\left((g+h)^3 - g^3\right) - \mu_\beta h$$

e dunque

$$D_g F(\beta_0, g_{\beta_0})[h] =$$

$$= -\frac{1}{2}h'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}h' + W_{\beta_0} h + \varepsilon^2 u h + \frac{3}{\pi}g^2_{\beta_0} h - \mu_{\beta_0} h =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}\frac{d}{dy} + W_{\beta_0} + \varepsilon^2 u + \frac{1}{\pi}g^2_{\beta_0} - \mu_{\beta_0}\right] h + \frac{2}{\pi}g^2_{\beta_0} h.$$

Per la Proposizione 5.3.1 abbiamo che il minimizzatore è unico, dunque dalla positività di g_β e dall'unicità del minimizzatore di $\mathcal{E}_\beta^{\mathrm{gv}}$ deriva ora l'invertibilità di $D_g F(\beta_0, g_{\beta_0})$ (il nucleo risulta banale). A questo punto però siamo nelle ipotesi del teorema della funzione implicita, dunque $\beta \mapsto g_\beta$ è un'applicazione derivabile con derivata continua.

Se ora deriviamo lungo β l'equazione variazionale di g_β otteniamo che $\partial_\beta g_\beta$ soddisfa la seguente:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\partial_\beta g_\beta)'' - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}(\partial_\beta g_\beta)' + W_\beta \partial_\beta g_\beta + \\
+ \varepsilon^2 u \partial_\beta g_\beta + \frac{3}{\pi} g_\beta^2 \partial_\beta g_\beta - \mu_\beta \partial_\beta g_\beta = -\partial_\beta W_\beta g_\beta.
\end{aligned}
$$

Ma allora possiamo ottenere ulteriore regolarità sulla $\partial_\beta g_\beta$ semplicemente replicando il ragionamento fatto in precedenza per F sull'applicazione indotta su $(\beta, \partial_\beta g_\beta)$ da questa nuova equazione e dedurne la tesi (è ovviamente essenziale in questo ragionamento il fatto che W_β sia C^∞ rispetto a β).

A questo punto della trattazione sembra emergere una apparente contraddizione tra due differenti definizioni dell'applicazione $\beta \mapsto g_\beta$, quella del teorema della funzione implicita e quella della Proposizione 5.3.1. Però la medesima Proposizione ci assicura l'unicità al variare di β della funzione minimizzatrice g_β e quindi la contraddizione in realtà non sussiste.

$\square$

Dimostriamo ora un risultato analogo per la derivata del minimo dell'energia.

Proposizione 5.5.2. *Il minimo dell'energia E_β^{gv} come funzione di β è derivabile infinite volte. Abbiamo inoltre per la derivata prima una formula esplicita data da*

$$
\partial_\beta E_\beta^{\mathrm{gv}} = \langle g_\beta \left| \partial_\beta W_\beta \right| g_\beta \rangle_\eta .
$$

Dimostrazione. Calcoliamo delle stime per il rapporto incrementale. Abbiamo

$$
E_{\beta_0+h}^{\mathrm{gv}} - E_{\beta_0}^{\mathrm{gv}} \leq \mathcal{E}_{\beta_0+h}^{\mathrm{gv}}[g_{\beta_0}] - \mathcal{E}_{\beta_0}^{\mathrm{gv}}[g_{\beta_0}] = \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y) \; (W_{\beta_0+h} - W_{\beta_0}) \, g_{\beta_0}^2.
$$

Esiste una costante C_ε tale che

$$
|\partial_\beta W_\beta| = \left| \frac{\alpha^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2} \left(\frac{\alpha^2 \beta}{4\Omega_0^2} - 2y - \varepsilon^2 y^2 \right) \right| \leq C_\varepsilon
$$

per ogni $\varepsilon > 0$, dunque

$$\left|(1+\varepsilon^2 y)\frac{W_{\beta+h}(y)-W_\beta(y)}{h}g_\beta^2(y)\right| \leq C_\varepsilon \left|g_\beta^2(y)\right|.$$

Possiamo applicare il teorema di convergenza dominata ed ottenere

$$\limsup_{h\to 0}\frac{E^{\mathrm{gv}}_{\beta+h}-E^{\mathrm{gv}}_\beta}{h} \leq \limsup_{h\to 0}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \frac{W_{\beta+h}-W_\beta}{h}g_\beta^2 =$$

$$= \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ (\partial_\beta W_\beta)\, g_\beta^2.$$

Per la disuguaglianza opposta usiamo la stessa idea e ricaviamo

$$E^{\mathrm{gv}}_\beta - E^{\mathrm{gv}}_{\beta-h} \geq \mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_\beta[g_\beta]-\mathcal{E}^{\mathrm{gv}}_{\beta-h}[g_\beta] = \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ (W_\beta - W_{\beta-h})\, g_\beta^2$$

e procedendo come sopra

$$\liminf_{h\to 0}\frac{E^{\mathrm{gv}}_{\beta+h}-E^{\mathrm{gv}}_\beta}{h} = \liminf_{h\to 0}\frac{E^{\mathrm{gv}}_{\beta}-E^{\mathrm{gv}}_{\beta-h}}{h} = \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ (\partial_\beta W_\beta)\, g_\beta^2.$$

A questo punto il limite esiste e abbiamo che

$$\partial_\beta E^{\mathrm{gv}}_\beta = \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ (\partial_\beta W_\beta)\, g_\beta^2 = \left\langle g_\beta\left|\partial_\beta W_\beta\right| g_\beta\right\rangle_\eta.$$

Per vedere che E^{gv}_β è C^∞ ora basta usare la regolarità di g_β e un argomento iterativo per ottenere la regolarità ad ogni ordine della derivata. Infatti quando andiamo a calcolare le derivate successive di $\partial_\beta E^{\mathrm{gv}}_\beta$ notiamo che queste sono effettivamente derivabili in quanto esprimibili in funzione di $\partial_\beta E^{\mathrm{gv}}_\beta$ e di derivate di g_β.

□

5.5.1 Minimizzazione di E^{gv}_β

Se scriviamo esplicitamente la derivata di W_β essa è della forma

$$\partial_\beta W_\beta = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(-2\alpha^2 y + \frac{\alpha^4\beta}{2\Omega_0^2} - \varepsilon^2\alpha^2 y^2\right).$$

La derivata del minimo dell'energia allora è

$$\partial_\beta E_\beta^{\mathrm{gv}} = \langle g_\beta \left| \partial_\beta W_\beta \right| g_\beta \rangle_\eta = -\alpha^2 \left\langle g_\beta \left| \frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta +$$

$$+\frac{\alpha^4\beta}{4\Omega_0^2} \left\langle g_\beta \left| \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta - \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{2} \left\langle g_\beta \left| \frac{y^2}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta .$$

Vogliamo ora calcolare esplicitamente questi tre termini facendo uso della (5.9). Nel corso del calcolo assumeremo quando risulterà opportuno che $\beta = \mathcal{O}(1)$. Questa ipotesi sarà giustificata dalla Proposizione **5.5.3**.

Cominciamo allora con lo studiare $\left\langle g_\beta \left| \frac{-\alpha^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta$ integrandolo per parti; otteniamo che

$$\left\langle g_\beta \left| \frac{-\alpha^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta = \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \frac{-\alpha^2 y}{1+\varepsilon^2 y} g_\beta^2 =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{y^2}{1+\varepsilon^2 y} g_\beta^2(y) \right]_{-\eta}^{\eta} + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} y^2 \mathrm{d}y \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{g_\beta^2}{1+\varepsilon^2 y} \right].$$

Notiamo che dalla definizione di η e dal Corollario 5.4.2 abbiamo che $g_\beta(\pm\eta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\eta_0})$ e quindi

$$-\frac{\alpha^2}{2} \left[y^2 \frac{g_\beta^2(y)}{1+\varepsilon^2 y} \right]_{-\eta}^{\eta} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\eta_0} \eta^2\right).$$

Dunque abbiamo che

$$\left\langle g_\beta \left| \frac{-\alpha^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_\beta \right\rangle_\eta = \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; y^2 \; \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{g_\beta^2}{1+\varepsilon^2 y} \right] + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\eta_0} \eta^2\right).$$

Se invece guardiamo al termine con derivata otteniamo

$$\frac{\alpha^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; y^2 \; \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{g_\beta^2}{1+\varepsilon^2 y} \right] = \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; y^2 \; \left[\frac{2 g_\beta g_\beta'}{1+\varepsilon^2 y} - \frac{\varepsilon^2 g_\beta^2}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right].$$

Ricordando che il potenziale W_β è della forma

$$W_\beta = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2} \left(\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2 \beta y + \frac{\alpha^4 \beta^2}{4\Omega_0^2} - \varepsilon^2 \alpha^2 \beta y^2 \right)$$

dalla (5.9) abbiamo che il primo integrale può essere riscritto come

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ y^2\ \frac{2g_\beta g_\beta'}{1+\varepsilon^2 y} = 2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[\frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\alpha^2 y^2 g_\beta\right] g_\beta' = \\
&= 2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[W_\beta g_\beta + \frac{\alpha^2\beta}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}+\varepsilon^2 y^2\right) g_\beta\right] g_\beta' = \\
&= \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\left(\frac{1}{2}g_\beta'' + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2 y)}g_\beta' - \frac{1}{\pi}g_\beta^3 + \mu_\beta\ g_\beta\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}+\varepsilon^2 y^2\right) g_\beta - 2\varepsilon^2 u(y)\ g_\beta\right] g_\beta' = \\
&= \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta''\ g_\beta' + \varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left(g_\beta'\right)^2 - \frac{2}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^3\ g_\beta' + \\
&+ \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\mu_\beta + \frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}+\varepsilon^2 y^2\right) - 2\varepsilon^2 u(y)\right] g_\beta\ g_\beta'
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\left\langle g_\beta \middle| \frac{-\alpha^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \middle| g_\beta \right\rangle_\eta &= \int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta''\ g_\beta' + \\
&+\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left(g_\beta'\right)^2 - \frac{2}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^3\ g_\beta' + \\
&+\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\mu_\beta + \frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}+\varepsilon^2 y^2\right) - \right.\\
&\left. -2\varepsilon^2 u(y)\right] g_\beta\ g_\beta' - \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}\left\langle g_\beta \middle| \frac{y^2}{(1+\varepsilon^2 y)^3} \middle| g_\beta \right\rangle + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\eta_0+2}\eta^3\right).
\end{aligned}
$$

Questo rappresenta il punto più ostico. Studieremo i termini restanti uno ad uno, ma prima di cominciare, introduciamo una notazione utile: dato che durante il calcolo compariranno più termini che si possono ricondurre a componenti del minimo dell'energia scriveremo

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ [g_\beta']^2, \\
V &= \frac{1}{2}\alpha^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^2 g_\beta^2, \\
Q &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^4,
\end{aligned}
$$

e ricordiamo che dalla normalizzazione di g_β si ha

$$
\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^2 = 1.
$$

Inoltre osserviamo che la Proposizione **5.4.1** implica che se $\beta = \mathcal{O}(1)$ allora $K = \mathcal{O}(1)$, $V = \mathcal{O}(1)$ e $Q = \mathcal{O}(1)$.

Infine notiamo che dalle stime di decadimento su g_β della Proposizione **5.4.4** abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ |y|^k g_\beta^2 \leq C \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y |y|^k e^{-2\sqrt{\Omega_0}|y|} = 2C \int_0^{\eta} y^k e^{-2\sqrt{\Omega_0} y} = \mathcal{O}(1)$$

che ci permetterà di stimare ciascuno di questi termini come un $\mathcal{O}(1)$.

Studiamo dunque i vari termini.

- Cominciamo con i primi due integrali. Si ha che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta''\ g_\beta' + \varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ \left(g_\beta'\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[\left(g_\beta'\right)^2\right]' + \varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ \left(g_\beta'\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1+\varepsilon^2 y) \left(g_\beta'(y)\right)^2\right]_{-\eta}^{\eta} + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ \left(g_\beta'\right)^2 =$$

$$= \varepsilon^2 \left(K - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y\ \ \left(g_\beta'\right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0 - 2}) \right);$$

ma ora

$$\left| \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y\ \ \left(g_\beta'\right)^2 \right| =$$

$$= \left| \left[y\ g_\beta\ g_\beta'\right]_{-\eta}^{\eta} - \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ g_\beta\ g_\beta' - \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y\ g_\beta\ g_\beta'' \right| \leq$$

$$\leq \|g_\beta\|^2_{L^2(-\eta,\eta)} \|g_\beta'\|^2_{L^2(-\eta,\eta)} +$$

$$+ \|y\ g_\beta\|^2_{L^2(-\eta,\eta)} \|g_\beta''\|^2_{L^2(-\eta,\eta)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\eta_0}) = \mathcal{O}(1).$$

Dunque

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta''\ g_\beta' + \varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ \left(g_\beta'\right)^2 =$$

$$= K\varepsilon^2 \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

per $\eta_0 \geq 4$.

- Studiamo ora il terzo integrale:

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^3\ g_\beta' = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[g_\beta^4\right]' =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[(1+\varepsilon^2 y)g_\beta^4(y)\right]_{-\eta}^{\eta} + \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y g_\beta^4 =$$

$$= \mathcal{O}(\varepsilon^{4\eta_0}) + Q\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ y\ g_\beta^4.$$

Dato che

$$\left|\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ y\ g_\beta^4\right| \le \|g_\beta\|_\infty^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ y\ g_\beta^2 = \mathcal{O}(1)$$

allora

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_\beta^3\ g_\beta' = Q\varepsilon^2\left(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

per $\eta_0 > 2$.

- Passiamo al quarto termine:

$$\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\mu_\beta + \frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y - \frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2} + \varepsilon^2 y^2\right)\right.$$

$$\left.-2\varepsilon^2 u(y)\right]g_\beta\ g_\beta' = \mu_\beta\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y(1+\varepsilon^2 y)\left[g_\beta^2\right]' +$$

$$+\alpha^2\beta\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)}\left[g_\beta^2\right]' - \frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)}\ \left[g_\beta^2\right]' +$$

$$+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2) - \varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ u(y)\left[g_\beta^2\right]' =$$

$$= \mu_\beta\left[(1+\varepsilon^2 y)g_\beta^2(y)\right]_{-\eta}^{\eta} - \mu_\beta\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ g_\beta^2 + \alpha^2\beta\left[\frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)}g_\beta^2(y)\right]_{-\eta}^{\eta} -$$

$$-\alpha^2\beta\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)} - \frac{\varepsilon^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right)g_\beta^2 -$$

$$-\frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)}g_\beta^2(y)\right]_{-\eta}^{\eta} - \frac{\alpha^4\beta^2}{8\Omega_0^2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\ g_\beta^2 -$$

$$-\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ u(y)\left[g_\beta^2\right]' + \mathcal{O}(\beta\varepsilon^2) =$$

$$= -\mu_\beta\varepsilon^2(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)) - \alpha^2\beta\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\ g_\beta^2 -$$

$$-\frac{\alpha^4\beta^2\varepsilon^2}{8\Omega_0^2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2))-\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\,(1+\varepsilon^2 y)\,u(y)\left[g_\beta^2\right]'+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta).$$

Ora abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ \frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\ g_\beta^2 = 1+\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left(\frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^3}-1\right)g_\beta^2 =$$

$$= 1+\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\frac{3\varepsilon^2 y+3\varepsilon^4 y^2+\varepsilon^6 y^3}{(1+\varepsilon^2 y)^2}g_\beta^2 =$$

$$= 1+3\varepsilon^2\left\langle g_\beta\left|\frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2))+\mathcal{O}(\varepsilon^4)).$$

Sfruttando che $\mu_\beta=\mathcal{O}(1)$ e che $\beta=\mathcal{O}(1)$ e prendendo $\eta_0>2$ abbiamo

$$\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\mu_\beta+\frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}+\varepsilon^2 y^2\right)-\right.$$

$$\left.-2\varepsilon^2 u(y)\right]g_\beta\ g_\beta' = -\alpha^2\beta-\mu_\beta\varepsilon^2-$$

$$-\alpha^2\beta\ \varepsilon^2\left[3\left\langle g_\beta\left|\frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle+\frac{\alpha^2\beta}{8\Omega_0^2}\right]-$$

$$-\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ u(y)\left[g_\beta^2\right]'+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

A questo punto è importante rivedere l'espressione di u:

$$u(y)=\frac{\alpha^2(\alpha^2-\Omega_0^2)y^3}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+\frac{(\alpha^2-3\Omega_0^2)(2\alpha^2-5\Omega_0^2)\varepsilon^2 y^4}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+$$

$$+\frac{(\alpha^2-3\Omega_0^2)(\alpha^2-4\Omega_0^2)\varepsilon^4 y^5}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^6}\varphi(1+\varepsilon^2 y),$$

con φ definito come il resto di Taylor del potenziale γ_s, cioè

$$\varphi(1+\varepsilon^2 y)=\gamma_s(1+\varepsilon^2 y)-\frac{s-2}{2}\varepsilon^4 y^2-\frac{(s-2)(s-1)}{6}\varepsilon^6 y^3.$$

Sappiamo che $\varphi(1+\varepsilon^2 y)=\mathcal{O}(\varepsilon^8\eta^4)$; vediamo quali stime abbiamo sulla sua derivata:

$$\varphi'(x)=\gamma_s'(x)-(s-2)(x-1)-\frac{(s-2)(s-1)}{2}(x-1)^2=$$

$$=(x^{s-1}-x)-(s-2)(x-1)-\frac{(s-2)(s-1)}{2}(x-1)^2=\mathcal{O}\left(|x-1|^3\right)$$

da cui
$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(1+\varepsilon^2 y)=\varepsilon^2\varphi'(1+\varepsilon^2 y)=\mathcal{O}\left(\varepsilon^8|y|^3\right).$$

Dunque

$$u'(y)=\frac{\alpha^2(\alpha^2-\Omega_0^2)y^2}{2\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+\frac{2(\alpha^2-3\Omega_0^2)(2\alpha^2-5\Omega_0^2)\varepsilon^2 y^3}{3\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+$$
$$+\frac{5(\alpha^2-3\Omega_0^2)(\alpha^2-4\Omega_0^2)\varepsilon^4 y^4}{6\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}+\frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^6}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(1+\varepsilon^2 y)=$$
$$=\frac{\alpha^2(\alpha^2-\Omega_0^2)}{2\Omega_0^2(1+\varepsilon^2 y)^2}y^2+\mathcal{O}\left(\varepsilon^8|y|^3\right).$$

Con queste stime in mente possiamo calcolare

$$-\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ u(y)\left[g_\beta^2\right]'=-\varepsilon^2\left[(1+\varepsilon^2 y)u(y)g_\beta^2(y)\right]_{-\eta}^{\eta}+$$
$$+\varepsilon^2\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\left(\varepsilon^2 u(y)+(1+\varepsilon^2 y)u'(y)\right)g_\beta^2=$$
$$=\frac{\alpha^2(\alpha^2-\Omega_0^2)\varepsilon^2}{2\Omega_0^2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ \frac{y^2}{1+\varepsilon^2 y}g_\beta^2+\mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0+2}\eta^3)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)=$$
$$=\frac{(\alpha^2-\Omega_0^2)\varepsilon^2}{\Omega_0^2}V+\mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

se $\eta_0>2$. Quindi abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[2\mu_\beta+\frac{\alpha^2\beta}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\left(2y-\frac{\alpha^2\beta}{4\Omega_0^2}\right)-2\varepsilon^2 u(y)\right]g_\beta\ g_\beta'=$$
$$=-\alpha^2\beta-\mu_\beta\varepsilon^2-\alpha^2\beta\varepsilon^2\left[3\left\langle g_\beta\left|\frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle_\eta+\frac{\alpha^2\beta}{8\Omega_0^2}\right]+$$
$$+\frac{(\alpha^2-\Omega_0^2)\varepsilon^2}{\Omega_0^2}V+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)=$$
$$=-\alpha^2\beta-\mu_\beta\varepsilon^2+\frac{(\alpha^2-\Omega_0^2)\varepsilon^2}{\Omega_0^2}V+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Adesso dunque utilizziamo le stime che abbiamo ottenuto per ricavare

$$\left\langle g_\beta\left|\frac{-\alpha^2 y}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle_\eta=K\varepsilon^2+Q\varepsilon^2-\alpha^2\beta-\mu_\beta\varepsilon^2+$$

$$+\frac{(\alpha^2-\Omega_0^2)\varepsilon^2}{\Omega_0^2}V+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)-$$
$$-\frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}\left\langle g_\beta\left|\frac{y^2}{(1+\varepsilon^2 y)^3}\right|g_\beta\right\rangle_\eta+\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\eta_0+2}\eta^3\right)=$$
$$=-\alpha^2\beta+\varepsilon^2\left[K+Q-\mu_\beta+\frac{\alpha^2-2\Omega_0^2}{\Omega_0^2}V+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right]+\mathcal{O}(\beta\varepsilon^2).$$

Notiamo che grazie all'equazione appena scritta abbiamo anche $\langle g_\beta\,|y|\,g_\beta\rangle_\eta=\mathcal{O}(\beta)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Studiamo poi $\frac{\alpha^4\beta}{4\Omega_0^2}\left\langle g_\beta\left|\frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle_\eta$. Questo termine si può stimare semplicemente stimando il denominatore, ed otteniamo

$$\frac{\alpha^4\beta}{4\Omega_0^2}\left\langle g_\beta\left|\frac{1}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right|g_\beta\right\rangle_\eta=\frac{\alpha^4\beta}{4\Omega_0^2}(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)).$$

Il termine mancante verrà studiato così com'è.

5.5.2 Stime sul valore di β_*

Cerchiamo un valore β_* minimale, e dunque tale che

$$\partial_\beta E_\beta^{\mathrm{gv}}\Big|_{\beta=\beta_*}=0.$$

Mostriamo innanzitutto che in queste ipotesi possiamo supporre che $\beta_*=\mathcal{O}(1)$.

Proposizione 5.5.3. *Sia β_* minimizzante per E_β^{gv}. Allora $\beta_*=\mathcal{O}(1)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $|\beta_*|\gg 1$. Quando $\varepsilon\to 0$

$$W_{\beta_*}(y)\geq\frac{\alpha^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\left[(y-{\beta_*}^2)^2+\left(\frac{(s+2)}{4}-1\right){\beta_*}^2-\varepsilon^2\beta_* y^2\right]\geq$$
$$\geq\frac{\alpha^2}{2(1+\varepsilon^2\eta)^2}\left[\frac{s-2}{4}{\beta_*}^2-\varepsilon^2\eta\beta_*\right]\geq\frac{\alpha^2}{2(1+o(1))^2}\left[\frac{s-2}{4}{\beta_*}^2-o(1)\beta_*\right]$$

e dunque varrebbe che

$$E_{\beta_*}^{\mathrm{gv}}\gg 1$$

e questo ci basta per ottenere l'assurdo da

$$1\ll E_{\beta_*}^{\mathrm{gv}}\leq E_0^{\mathrm{gv}}=\mathcal{O}(1).$$

□

Alla luce di questa stima otteniamo che il β_* corrispondente è tale che

$$0 = -\alpha^2\beta_* + \frac{\alpha^4\beta_*}{4\Omega_0^2} + \varepsilon^2\Big[K + Q - \mu_{\beta_*} +$$

$$+\frac{\alpha^2 - 3\Omega_0^2}{\Omega_0^2}V + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big] + \mathcal{O}(\beta_*\varepsilon^2) =$$

$$= -\alpha^2\beta_* + \frac{\alpha^4\beta_*}{4\Omega_0^2} + \varepsilon^2\left[K + Q - (K + V + 2Q) + \right.$$

$$\left. +(s-1)V + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right] + \mathcal{O}(\beta_*\varepsilon^2) =$$

$$= -\alpha^2\beta_* + \frac{\alpha^4\beta_*}{4\Omega_0^2} + \varepsilon^2\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right] + \mathcal{O}(\beta_*\varepsilon^2)$$

cioè tale che

$$\beta_*\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4\Omega_0^2}\right)(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = \varepsilon^2\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right].$$

Ma il prefattore di β_* non è altro che

$$\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4\Omega_0^2} = \frac{\alpha^2}{4\Omega_0^2}\left(4\Omega_0^2 - \Omega_0^2(s+2)\right) = -\frac{\alpha^2}{4}(s-2) = -\frac{\Omega_0^2(s^2-4)}{4} < 0$$

dato che $s > 2$. Allora otteniamo

$$\beta_* = -\varepsilon^2\frac{4}{\Omega_0^2(s^2-4)}\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right].$$

Se usiamo questa stima possiamo ottenere su δ_* la seguente

$$\delta_* = \frac{\alpha^2\beta_*}{2\Omega_0\varepsilon^2} = -\frac{2}{\Omega_0(s-2)}\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right].$$

Osservazione. Le stime appena calcolate ci forniscono informazioni sulla forte simmetria di g_{β_*}. Infatti da $\langle g_{\beta_*}\, |y|\, g_{\beta_*}\rangle_\eta = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y\ g_{\beta_*}^2 = \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1 + \varepsilon^2 y)\ y\ g_{\beta_*} - \varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y^2\ g_{\beta_*}^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

stima che sottolinea un comportamento simmetrico di g_{β_*} rispetto all'origine.

Per quanto riguarda l'unicità del β_* minimizzante supponiamo di avere due valori β_*^1 e β_*^2 tali che

$$E^{\mathrm{gv}}_{\beta_*^1} = E^{\mathrm{gv}}_{\beta_*^2} = \inf_{\beta\in\mathbb{R}} E^{\mathrm{gv}}_\beta.$$

Sappiamo che per entrambi vale la stima che abbiamo calcolato sopra, e in particolare

$$\beta_*^1 - \beta_*^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Sappiamo inoltre che E_β^{gv} è regolare in β, quindi esprimendo E_β^{gv} in serie di Taylor attorno a β_*^1 otteniamo per[4] $C > 0$

$$E_\beta^{\mathrm{gv}} = E_{\beta_*^1}^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{2}C(\beta - \beta_*^1)^2 + \mathcal{O}\left(|\beta - \beta_*^1|^3\right)$$

dunque

$$E_{\beta_*^2}^{\mathrm{gv}} = E_{\beta_*^1}^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{2}C(\beta_*^2 - \beta_*^1)^2 + \mathcal{O}\left(|\beta_*^2 - \beta_*^1|^3\right).$$

Dato che ora $(\beta_*^1 - \beta_*^2)^3 \ll (\beta_*^1 - \beta_*^2)^2$ allora abbiamo che definitivamente

$$E_{\beta_*^2}^{\mathrm{gv}} \geq E_{\beta_*^1}^{\mathrm{gv}} + \frac{1}{4}C(\beta_*^2 - \beta_*^1)^2$$

ma dato che le due energie coincidono, si deve avere che definitivamente $\beta_*^1 = \beta_*^2$ e abbiamo quindi dimostrato il Teorema **4.1.1**.

5.6 Introduzione del funzionale limite

Introduciamo ora quello che rappresenta il funzionale limite del sistema:

$$\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}[g] := \int_{\mathbb{R}} dy \left\{ \frac{1}{2}[g']^2 + \frac{\alpha^2}{2} y^2 g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4 \right\}. \tag{5.10}$$

Per questo funzionale vale una proposizione di esistenza del minimo analoga a quella enunciata per i funzionali precedenti.

5.6.1 Minimizzazione di $\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}$

Proposizione 5.6.1. *Sia $\mathcal{D}^{\mathrm{lim}}$ definito come*

$$\mathcal{D}^{\mathrm{lim}} := \left\{ g \in H^1(\mathbb{R}) : \ g = g^*, \ \|g\|_2^2 = 1 \right\}.$$

Allora il funzionale $\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}$ ammette su $\mathcal{D}^{\mathrm{lim}}$ un unico minimizzatore positivo g_{lim} tale che

$$E^{\mathrm{lim}} := \inf_{g \in \mathcal{D}^{\mathrm{lim}}} \mathcal{E}^{\mathrm{lim}}[g] = \mathcal{E}^{\mathrm{lim}}[g_{\mathrm{lim}}]$$

[4] Il calcolo esplicito di C, corrispondente alla derivata seconda di E_β^{gv} in β_* deve essere svolto procedendo come nella Proposizione 5.5.2 e lo omettiamo qui per brevità.

che può essere scelto strettamente positivo. Tale minimizzatore soddisfa l'equazione variazionale

$$-\frac{1}{2}g''_{\mathrm{lim}} + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\mathrm{lim}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\mathrm{lim}} = \mu_{\mathrm{lim}} g_{\mathrm{lim}}. \tag{5.11}$$

μ_{lim} *si dice nuovamente potenziale chimico ed è tale che* $\mu_{\mathrm{lim}} = E^{\mathrm{lim}} + \frac{1}{2\pi}\|g_{\mathrm{lim}}\|_4^4$. *Inoltre la funzione* g_{lim} *è in* $C^\infty(\mathbb{R})$ *e soddisfa la* (5.11) *in senso classico.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede analogamente al caso del funzionale di Giant Vortex.

□

Corollario 5.6.2. g_{lim} *è pari rispetto all'origine.*

Dimostrazione. Il funzionale è invariante per riflessione rispetto all'origine, cioè $\tilde{g}(y) := g(-y)$ e $g(y)$ hanno la stessa energia. Allora dall'unicità del minimizzatore segue il risultato.

□

5.6.2 Stime

Per il minimizzatore del funzionale $\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}$ possiamo dedurre stime di decadimento migliori di quelle dei minimizzatori degli altri funzionali.

Proposizione 5.6.3. *Esiste una costante* $\mathcal{K}$ *tale che*

$$\|g_{\mathrm{lim}}\|_4^2 e^{-\frac{\alpha}{2}y^2} \leq g_{\mathrm{lim}}(y) \leq \mathcal{K}\|g_{\mathrm{lim}}\|_\infty e^{-\frac{\alpha}{4}y^2}.$$

Dimostrazione. Anche qui per la dimostrazione applichiamo il metodo delle sopra e delle sottosoluzioni. Fissiamo innanzitutto $y \geq 0$. Dato che il minimizzatore è pari qualsiasi stima per y positivi varrà anche per y negativi.

Supponiamo allora inizialmente di considerare la nostra funzione con $y \in \mathcal{B}(a)^c$, cioè tale che $y \geq a$.

Per la positività di g_{lim} vale che

$$-\frac{1}{2}g''_{\mathrm{lim}} = \left(\mu_{\mathrm{lim}} - \frac{\alpha^2}{2}y^2 - \frac{1}{\pi}g^2_{\mathrm{lim}}\right) g_{\mathrm{lim}} \leq$$

$$\leq \left(\mu_{\text{lim}} - \frac{\alpha^2}{2}a^2\right) g_{\text{lim}} \leq -\frac{\alpha^2}{4} g_{\text{lim}}$$

se $a \geq \frac{4\mu_{\text{lim}}}{\alpha^2}$. Allora g_{lim} è sottosoluzione del problema

$$-\frac{1}{2}g''_{\text{lim}} + \frac{\alpha^2}{4}y^2 g_{\text{lim}} = 0.$$

Se adesso consideriamo la funzione

$$g_{\text{sup}}(y) := \mathcal{K}\|g_{\text{lim}}\|_\infty e^{-\frac{\alpha}{4}y^2}$$

questa è soprasoluzione della stessa equazione, infatti

$$-\frac{1}{2}g''_{\text{sup}} + \frac{\alpha^2}{4}y^2 g_{\text{sup}} = \frac{\alpha}{4} g_{\text{sup}} \geq 0$$

e, a meno di scegliere $\mathcal{K} \geq e^{\frac{\alpha}{4}a^2}$, $g_{\text{sup}}(a) \geq g_{\text{lim}}(a)$. Per il principio del massimo e la monotonia di g_{sup}, se $y \geq 0$ allora

$$g_{\text{lim}}(y) \leq \mathcal{K}\|g_{\text{lim}}\|_\infty e^{-\frac{\alpha}{4}y^2}.$$

Per l'altra disuguaglianza notiamo ora che g_{lim} è soprasoluzione del problema

$$-\frac{1}{2}g''_{\text{lim}} + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\text{lim}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\text{lim}} = \mu_{\text{lim}} g_{\text{lim}}.$$

Se definiamo

$$g_{\text{inf}}(y) := \mathcal{K}' e^{-\frac{\alpha}{2}y^2}$$

per $\mathcal{K}'$ opportuno questa è sottosoluzione dello stesso problema; infatti

$$-\frac{1}{2}g''_{\text{inf}} + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\text{inf}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\text{inf}} = \frac{\alpha}{2} g_{\text{inf}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\text{inf}}$$

e dato che in generale vale che

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\pi}\|g_{\text{lim}}\|_4^4 \leq \mu_{\text{lim}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \leq \mu_{\text{lim}} - \frac{1}{\pi}\|g_{\text{lim}}\|_4^4$$

allora

$$-\frac{1}{2}g''_{\text{inf}} + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\text{inf}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\text{inf}} \leq \left(\mu_{\text{lim}} - \frac{1}{\pi}\|g_{\text{lim}}\|_4^4\right) g_{\text{inf}} + \frac{1}{\pi}g^3_{\text{inf}} \leq$$

$$\leq \left(\mu_{\text{lim}} - \frac{1}{\pi}\|g_{\text{lim}}\|_4^4 + \frac{1}{\pi}(\mathcal{K}')^2\right) g_{\text{inf}} \leq \mu_{\text{lim}} g_{\text{inf}}$$

se $\mathcal{K}' \leq \|g_{\text{lim}}\|_4^2$, da cui g_{inf} è sottosoluzione.

Ora si ha che $g_{\lim}$ ha un unico massimo nell'origine; per mostrare questo risultato basta ricordare che $g_{\lim}$ è pari e notare che se si avesse un altro punto di massimo per $y > 0$ allora la minimalità di $g_{\lim}$ verrebbe meno e ci darebbe un assurdo: infatti il fatto che il potenziale ha un minimo nell'origine permette di diminuire l'energia di uno stato spostando massa da $y > 0$ all'origine[5] (si veda anche la Proposizione 2.2 in [CPRY1]).

A questo punto però possiamo concludere come sopra, scegliendo $\mathcal{K}_2 = \|g_{\lim}\|_4^2$ così che nell'origine

$$g_{\lim}(0) = \|g_{\lim}\|_\infty \geq \|g_{\lim}\|_4^2 = g_{\inf}(0)$$

e ottenere che

$$g_{\lim} \geq \|g_{\lim}\|_4^2 e^{-\frac{\alpha}{2}y^2}.$$

□

Dato che ci servirà in seguito esibiamo anche una stima sulla derivata prima di $g_{\lim}$.

Proposizione 5.6.4. *Esiste una costante C tale che*

$$\left|g'_{\lim}(y)\right| \leq Cy^2 e^{-\frac{\alpha}{4}y^2}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $g_{\lim}$ è pari e quindi la sua derivata è dispari. La stima si ottiene dunque integrando l'equazione (5.11); infatti se $y \geq 0$ vale che

$$\begin{aligned}\left|g'_{\lim}(y)\right| = \left|\int_y^{+\infty} \mathrm{d}\tau g''_{\lim}(\tau)\right| = \left|2\int_y^{+\infty} \mathrm{d}\tau \left(\mu_{\lim} - \frac{\alpha^2}{2}\tau^2 - \frac{1}{\pi}g_{\lim}\right) g_{\lim}\right| \leq \\ \leq C_1 \left[\mu_{\lim} \int_y^{+\infty} \mathrm{d}\tau e^{-\frac{\alpha}{4}\tau^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2}\int_y^{+\infty} \mathrm{d}\tau e^{-\frac{\alpha}{4}\tau^2}\tau^2 + \frac{1}{\pi}\int_y^{+\infty} \mathrm{d}\tau e^{-\frac{\alpha}{2}\tau^2}\right] \leq \\ \leq C_2 y^2 e^{-\frac{\alpha}{4}y^2}\end{aligned}$$

avendo fatto uso nell'ultima disuguaglianza di alcune stime per le code dell'esponenziale (fare riferimento per esempio a pagg. 228-229 di [AS]).

□

[5] Notiamo che il fatto di avere un unico massimo nell'origine e il decadimento all'infinito ci dicono che $g_{\lim}$ è monotòna decrescente in $[0, +\infty)$.

5.7 Relazioni fra E_*^{gv} e il funzionale limite

A questo punto usiamo il valore critico β_* che abbiamo ottenuto per ottenere delle stime sull'energia e sui minimizzatori. A questo valore è associata ancora una volta una energia data da

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[g] &:= \mathcal{E}_{\beta_*}^{\mathrm{gv}}[g] = \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ (1+\varepsilon^2 y) \ \left\{ \frac{1}{2}[g']^2 + W_{\beta_*}(y) g^2 + \varepsilon^2 u(y) g^2 + \frac{1}{2\pi} g^4 \right\}\end{aligned} \quad (5.12)$$

con $E_*^{\mathrm{gv}} := E_{\beta_*}^{\mathrm{gv}}$.

Nel limite di $\varepsilon \to 0$ otteniamo che il funzionale $\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}$ assume almeno formalmente la forma data da $\mathcal{E}^{\mathrm{lim}}$. Questa idea è alla base della dimostrazione del Teorema **4.1.2**.

Dimostrazione del Teorema **4.1.2**. Per stabilire una relazione fra le due energie è sufficiente usare un'opportuna funzione test per l'una al fine di ottenere una stima per l'altra e viceversa.

In questa ottica definiamo

$$g_T(y) := \begin{cases} C g_*(y), & \forall |y| \le \eta, \\ C g_*(\eta) r\left(\frac{y}{\eta}\right), & \forall \eta \le |y| \le 2\eta, \\ 0, & |y| \ge 2\eta, \end{cases}$$

con $g_* := g_{\beta_*}$, $r \in C^\infty(\mathbb{R})$ monotòna con $r(1) = 1$, $r(2) = 0$ e C tale che $\|g_T\|_2^2 = 1$.

Iniziamo con lo stimare il valore di C: imponendo la normalizzazione di g_T abbiamo

$$1 = \|g_T\|_2^2 = C^2 \left[\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ g_*^2 + 2 g_*^2(\eta) \int_{\eta}^{2\eta} \mathrm{d}y \ r^2\left(\frac{y}{\eta}\right) \right].$$

Possiamo stimare il primo integrale e ottenere

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ g_*^2 = 1 - \varepsilon^2 \int_{-\eta}^{\eta} y \ \mathrm{d}y \ g_*^2 =$$

$$= 1 - \varepsilon^2 \left\langle g_* \, |y| \, g_* \right\rangle_\eta \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

e dunque

$$1 = C^2 \left[1 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right] \Rightarrow C^2 = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Calcoliamo allora

$$\mathcal{E}^{\lim}[g_T] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \ \left\{ \frac{1}{2}\left|g_T'\right|^2 + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_T^2 + \frac{1}{2\pi}g_T^4 \right\} =$$

$$= C^2 \left[\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ \left\{ \frac{1}{2}|g_*'|^2 + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_*^2 + \frac{C^2}{2\pi}g_*^4 \right\} + \right.$$

$$\left. +2g_*^2(\eta) \int_{\eta}^{2\eta} \mathrm{d}y \ \left\{ \frac{1}{2\eta^2}\left[r'\left(\frac{y}{\eta}\right)\right]^2 + \frac{\alpha^2}{2}y^2 r^2\left(\frac{y}{\eta}\right) + \frac{C^2}{2\pi}r^4\left(\frac{y}{\eta}\right) \right\} \right].$$

Dato che usando le stime note per β_* si ha che

$$\left\langle g_* \left| W_{\beta_*}(y) + \varepsilon^2 u(y) - \frac{\alpha^2}{2}y^2 \right| g_* \right\rangle_{\eta} =$$

$$= \left\langle g_* \left| \frac{1}{2(1+\varepsilon^2 y)^2} \left(\frac{\alpha^4\beta_*^2}{4\Omega_0^2} - 2\alpha^2\beta_* y - \varepsilon^2\alpha^2\beta_* y^2 \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha^2}{2(1+\varepsilon^2 y)^2}\varepsilon^2 y^3(2-\varepsilon^2 y) + \varepsilon^2 u(y) \right| g_* \right\rangle_{\eta} = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.13)$$

allora

$$\mathcal{E}^{\lim}[g_T] = C^2\left[E_*^{\mathrm{gv}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0})\right] = E_*^{\mathrm{gv}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Analogamente, se $g_{\lim}$ è un elemento che realizza il minimo per $E^{\lim}$ consideriamo allora $Cg_{\lim}$ con C tale che $Cg_{\lim}$ come funzione ristretta in A_η sia in $\mathcal{D}_*^{\mathrm{gv}}$. Allora di nuovo $C^2 = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ e abbiamo che

$$\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[Cg_{\lim}] = C^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ (1+\varepsilon^2 y) \ \left\{ \frac{1}{2}(g_{\lim}')^2 + W_{\beta_*}g_{\lim}^2 + \frac{C^2}{2\pi}g_{\lim}^4 \right\} =$$

$$= (1+\mathcal{O}(\varepsilon^4))C^2 \left[\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \ \left\{ \frac{1}{2}(g_{\lim}')^2 + \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\lim}^2 + \frac{1}{2\pi}g_{\lim}^4 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right] \leq$$

$$\leq E^{\lim} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

da cui concludiamo che

$$E_*^{\mathrm{gv}} = E^{\lim} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

□

Osservazione. Notiamo che l'errore viene stimato come $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ a causa della stima di $\left\langle g_* \left| y^3 \right| g_* \right\rangle$ come $\mathcal{O}(1)$. Ci si potrebbe aspettare dalla simmetria di g_* che l'errore sia in realtà più piccolo.

La Proposizione **4.1.3**, o più precisamente l'equazione (5.14) ci permette di fare proprio questo, infatti si ha

$$\left\|g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right\|_{L^2_\eta} = \mathcal{O}\left(\sqrt{|E^{\text{lim}} - E_*^{\text{gv}}|}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \eta^{\frac{7}{2}}\right).$$

e nella dimostrazione appena vista abbiamo fatto uso delle seguenti (si veda la (5.13))

$$|E^{\text{lim}} - E_*^{\text{gv}}| = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \left\langle g_* \left|y^3\right| g_* \right\rangle\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

$$\left\langle g_* \left|y^3\right| g_* \right\rangle = \mathcal{O}(1).$$

Se ora notiamo però che

$$\left|\left\langle g_* \left|y^3\right| g_* \right\rangle\right| = \left|\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y^3 g_*^2\right| = \left|\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y^3 \left(g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right)\right| \leq \eta^{\frac{7}{2}} \left\|g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right\|_{L^2_\eta}$$

allora abbiamo che

$$\begin{aligned} |E^{\text{lim}} - E_*^{\text{gv}}| &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \left\langle g_* \left|y^3\right| g_* \right\rangle\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \\ &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \eta^{\frac{7}{2}} \left\|g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right\|_{L^2_\eta}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \\ &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \eta^{\frac{7}{2}} \sqrt{|E^{\text{lim}} - E_*^{\text{gv}}|}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Da quest'ultima formula possiamo dedurre

$$E_*^{\text{gv}} = E^{\text{lim}} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4 \eta^7\right).$$

5.7.1 Relazioni fra i minimizzatori

Usiamo a questo punto la relazione appena trovata per dimostrare la Proposizione **4.1.3**.

Dimostrazione della Proposizione **4.1.3**. Dalla Proposizione **5.6.3** abbiamo che $g_{\text{lim}} > 0$. Definiamo allora in $(-\eta, \eta)$

$$v(y) := \frac{g_*(y)}{g_{\text{lim}}(y)}$$

e cerchiamo di mostrare le stime sui minimizzatori in termini di v. Usiamo la minimizzazione di E_*^{gv} e otteniamo

$$E_*^{\text{gv}} = \mathcal{E}_*^{\text{gv}}[g_*] = \mathcal{E}_*^{\text{gv}}[v\ g_{\text{lim}}] =$$

$$= \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y) \left\{ \frac{1}{2}[(v\ g_{\mathrm{lim}})']^2 + W_\beta(y)[v\ g_{\mathrm{lim}}]^2 + \frac{1}{\pi}[v\ g_{\mathrm{lim}}]^4 \right\}.$$

Inizialmente studiamo il termine cinetico. Abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)[(v\ g_{\mathrm{lim}})']^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y) \left([v']^2 g_{\mathrm{lim}}^2 + 2vv'\ g_{\mathrm{lim}} g'_{\mathrm{lim}} + v^2 [g'_{\mathrm{lim}}]^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y) \left([v']^2 g_{\mathrm{lim}}^2 + \frac{1}{2}(v^2)'(g_{\mathrm{lim}}^2)' + v^2 [g'_{\mathrm{lim}}]^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y) \left([v']^2 g_{\mathrm{lim}}^2 + v^2 [g'_{\mathrm{lim}}]^2\right) + \frac{1}{4}\left[(1+\varepsilon^2 y) v^2 (g_{\mathrm{lim}}^2)'\right]_{-\eta}^{\eta} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y) v^2 \left([g'_{\mathrm{lim}}]^2 + g_{\mathrm{lim}} g''_{\mathrm{lim}}\right) - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ v^2 (g_{\mathrm{lim}}^2)'.$$

Faremo uso del seguente Lemma.

Lemma 5.7.1. *Esiste una costante positiva C tale che per ogni $y \in \mathbb{R}$*

$$\left|g'_{\mathrm{lim}}(y)\right| \leq C\eta^3 g_{\mathrm{lim}}(y).$$

Dimostrazione. Integriamo la (5.11) fra $y > 0$ e 2η; abbiamo che

$$\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(y) = \frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(2\eta) + \int_y^{2\eta} d\xi \left(\mu_{\mathrm{lim}} - \frac{1}{\pi} g_{\mathrm{lim}}^2 - \frac{\alpha^2}{2}\xi^2\right) g_{\mathrm{lim}}.$$

Dalla monotonia di g_{lim} otteniamo il fatto che $g'_{\mathrm{lim}}(y) \leq 0$ e che $g'_{\mathrm{lim}}(2\eta) \leq 0$ e dunque

$$\left|\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(y)\right| = \left|\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(2\eta)\right| - \int_y^{2\eta} d\xi \left(\mu_{\mathrm{lim}} - \frac{1}{\pi} g_{\mathrm{lim}}^2 - \frac{\alpha^2}{2}\xi^2\right) g_{\mathrm{lim}} =$$

$$= \left|\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(2\eta)\right| + \int_y^{2\eta} d\xi \left(\frac{\alpha^2}{2}\xi^2 + \frac{1}{\pi} g_{\mathrm{lim}}^2 - \mu_{\mathrm{lim}}\right) g_{\mathrm{lim}}.$$

Dato che $\frac{\alpha^2}{2}\xi^2 + \frac{1}{\pi} g_{\mathrm{lim}}^2 \leq C_1 \eta^2$ allora

$$\left|\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(y)\right| \leq \left|\frac{1}{2} g'_{\mathrm{lim}}(2\eta)\right| + \int_y^{2\eta} d\xi\ \left(\frac{\alpha^2}{2}\xi^2 + \frac{1}{\pi} g_{\mathrm{lim}}^2\right) g_{\mathrm{lim}} \leq$$

$$\leq C_2 4\eta^2 e^{-\frac{\alpha}{2}\eta} + 2C_1\eta^3 g_{\mathrm{lim}}(y) \leq$$

$$\leq C_3 \eta^2 g_{\mathrm{lim}}(\eta) + 2C_1 \eta^3 g_{\mathrm{lim}}(y) \leq C_4 \eta^3 g_{\mathrm{lim}}(y).$$

□

Questo vuol dire che

$$\left|v^2(\eta)g_{\mathrm{lim}}(\eta)g'_{\mathrm{lim}}(\eta)\right| = \frac{g_*^2(\eta)}{g_{\mathrm{lim}}(\eta)}|g'_{\mathrm{lim}}(\eta)| \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta^3).$$

Inoltre dalla parità di g_{lim} abbiamo

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; v^2(g_{\mathrm{lim}}^2)' = \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)'$$

e dunque

$$\frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)[(v \; g_{\mathrm{lim}})']^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)[v']^2 g_{\mathrm{lim}}^2 - \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)v^2 g_{\mathrm{lim}} g''_{\mathrm{lim}} -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)' + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta^3) = \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)[v']^2 g_{\mathrm{lim}}^2 +$$

$$+\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)v^2 g_{\mathrm{lim}}\left[\mu_{\mathrm{lim}} g_{\mathrm{lim}} - \frac{\alpha^2}{2}y^2 g_{\mathrm{lim}} - \frac{1}{\pi}g_{\mathrm{lim}}^3\right] -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)' + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)|v'|^2 g_{\mathrm{lim}}^2 + \mu_{\mathrm{lim}} - \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)y^2 g_*^2 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)g_*^2 \; g_{\mathrm{lim}}^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)' + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta^3) =$$

$$= E^{\mathrm{lim}} - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)' +$$

$$+\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)g_{\mathrm{lim}}^2\left\{\frac{1}{2}|v'|^2 - \frac{\alpha^2}{2}y^2 v^2 + \frac{1}{2\pi}\left(g_{\mathrm{lim}}^2 - 2g_{\mathrm{lim}}^2 v^2\right)\right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\eta_0}\eta^3).$$

Allora abbiamo

$$E_*^{\mathrm{gv}} = E^{\mathrm{lim}} - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (v^2-1)(g_{\mathrm{lim}}^2)' + \mathcal{F}[v] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\eta_0})$$

con $\mathcal{F}[v]$ definito come

$$\mathcal{F}[v] := \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y)g_{\mathrm{lim}}^2\left\{\frac{1}{2}[v']^2 + \right.$$

$$\left. + \left(W_\beta(y) + \varepsilon^2 u(y) - \frac{\alpha^2}{2}y^2\right)v^2 + \frac{1}{2\pi}g_{\mathrm{lim}}^2\left(1-v^2\right)^2\right\}.$$

Abbiamo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)g_{\mathrm{lim}}^4[1-v^2]^2 \leq \mathcal{F}[v]+\mathcal{O}(\varepsilon^4) \leq$$

$$\leq |E^{\mathrm{lim}}-E_*^{\mathrm{gv}}| + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ |v^2-1||g'_{\mathrm{lim}}|g_{\mathrm{lim}}+\mathcal{O}(\varepsilon^4) \leq$$

$$\leq |E^{\mathrm{lim}}-E_*^{\mathrm{gv}}| + \frac{C\varepsilon^2\eta^3}{2}\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (v^2-1)g_{\mathrm{lim}}^2+\mathcal{O}(\varepsilon^4) \leq$$

$$\leq C\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\left\|g_{\mathrm{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta} + |E^{\mathrm{lim}}-E_*^{\mathrm{gv}}| + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

A questo punto possiamo riscrivere la stessa equazione come

$$\left(\left\|g_{\mathrm{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta} - C'\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right)^2 \leq |E^{\mathrm{lim}}-E_*^{\mathrm{gv}}| + \mathcal{O}\left(\varepsilon^4\eta^7\right)$$

$$\Rightarrow \left\|g_{\mathrm{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta} = \mathcal{O}\left(\sqrt{|E^{\mathrm{lim}}-E_*^{\mathrm{gv}}|}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right). \tag{5.14}$$

A questo punto usando le stesse tecniche dell'osservazione in fondo alla dimostrazione del Teorema **4.1.2** possiamo ottenere che

$$\left\|g_{\mathrm{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta} = \mathcal{O}(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}})$$

e dalla definizione di v dedurre la prima stima fra g_* e g_{lim}.

Fissato ν, sia ora ξ tale che $g_{\mathrm{lim}}(\pm\xi) = \frac{1}{\eta^\nu}$. Dalla monotonia di g_{lim} esso è univocamente determinato; inoltre dalle stime su g_{lim} possiamo scrivere

$$\xi \propto \sqrt{\nu|\log\eta|} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$$

e questo ci permette di definire $\hat{A}$ come

$$\hat{A} := \left\{y\in\mathbb{R}:\ g_{\mathrm{lim}}(y)\geq\frac{1}{\eta^\nu}\right\} = [-\xi,\xi]$$

da cui si ottiene che

$$\int_{-\xi}^{\xi}\mathrm{d}y\ (v^2-1)^2 \leq \eta^{4\nu}\int_{-\xi}^{\xi}\mathrm{d}y\ g_{\mathrm{lim}}^4(v^2-1)^2 \leq$$

$$\leq \eta^{4\nu}\left\|g_{\mathrm{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta}^2 \leq C\varepsilon^4\eta^{7+4\nu}.$$

A questo punto scegliamo $\rho>0$ da fissare in seguito e supponiamo per assurdo che in un certo punto y_0 si abbia

$$\left|v^2(y_0)-1\right| \geq \rho.$$

Adesso usando il fatto che $\left\|g_{\text{lim}}^2(v^2-1)\right\|_{L^2_\eta} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ sulla stima per $\mathcal{F}[v]$ otteniamo

$$\|v'\|^2_{L^2(\hat{A})} \leq \eta^{2\nu} \int_{\hat{A}} \mathrm{d}y \; g^2_{\text{lim}} |v'|^2 \leq$$
$$\leq 2\eta^{2\nu} \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon^2 y) \frac{1}{2} g^2_{\text{lim}} |v'|^2 \leq \mathcal{F}[v] = \mathcal{O}\left(\varepsilon^4 \eta^{7+2\nu}\right)$$

allora per $y \leq y_0$ in $\hat{A}$ abbiamo

$$|v(y) - v(y_0)| \leq \int_y^{y_0} \mathrm{d}y \; |v'| \leq (2\eta)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{L^2(\hat{A})} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \eta^{4+\nu}\right)$$

e ugualmente anche per $y \geq y_0$.

Allora a questo punto avremo che se $\rho > 2C\varepsilon^2\eta^{4+\nu}$ con $C > 0$ opportuna si ha

$$|v(y) - 1| \geq |v(y_0) - 1| - |v(y) - v(y_0)| \geq$$
$$\geq \rho - C\varepsilon^2\eta^{4+\nu} \geq \frac{\rho}{2}.$$

Ma allora vuol dire che si ha

$$2\xi \frac{\rho^2}{4} \leq \int_{-\xi}^{\xi} \mathrm{d}y \; (1+\varepsilon y)(1-v^2)^2 \leq C\varepsilon^4 \eta^{7+4\nu}.$$

Dato che $\xi \gg 1$ allora vuol dire che la precedente condizione ci dice che per $C' > 0$ opportuno

$$\rho \leq C'\varepsilon^2 \eta^{\frac{7}{2}+2\nu}.$$

Dal fatto che possiamo scegliere ρ tale che

$$\rho \geq C'\varepsilon^2\eta^{4+2\nu} \gg \varepsilon^2 \eta^{\frac{7}{2}+2\nu}$$

otteniamo l'assurdo e dunque vale che per ogni y in $\hat{A}$

$$|v(y) - 1| \leq C'\varepsilon^2\eta^{4+2\nu}.$$

Applicando ora questa stima alle due funzioni iniziali abbiamo

$$|g_*(y) - g_{\text{lim}}(y)| = g_{\text{lim}}(y)|v(y) - 1| \leq C'\varepsilon^2\eta^{4+2\nu}$$

da cui la tesi.

□

5.7.2 Il segno di δ_*

Sfruttiamo le stime che abbiamo calcolato per individuare il segno di δ_*.

Dimostrazione della Proposizione **4.1.4**. Abbiamo

$$\delta_* = -\frac{2}{\Omega_0(s-2)}\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right].$$

Innanzitutto riscriviamo V e Q in termini di g_{lim}; se applichiamo la stima che abbiamo ottenuto fra g_* e g_{lim} vale che

$$V = \frac{\alpha^2}{2}\left\langle g_* \left| y^2 \right| g_* \right\rangle_\eta =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^2 g_{\text{lim}}^2 + \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^2\left[g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right].$$

Abbiamo che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^2\left[g_*^2 - g_{\text{lim}}^2\right] \leq$$

$$\leq \left[\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^4\left(g_* + g_{\text{lim}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left\| g_* - g_{\text{lim}} \right\|_{L^2_\eta} \leq C\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}},$$

dunque

$$V = \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ y^2 g_{\text{lim}}^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ y^2 g_{\text{lim}}^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right) =$$

$$= \left\langle g_{\text{lim}} \left| \frac{\alpha^2}{2} y^2 \right| g_{\text{lim}} \right\rangle + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right).$$

Inoltre

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_*^4 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_{\text{lim}}^4 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[g_{\text{lim}}^4 - g_*^4\right].$$

Dato che

$$\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left[g_{\text{lim}}^4 - g_*^4\right] \leq C\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left|g_{\text{lim}}^2 - g_*^2\right| \leq$$

$$\leq C\left[\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ (g_* + g_{\mathrm{lim}})^2\right]^{\frac{1}{2}} \|g_* - g_{\mathrm{lim}}\|_{L^2_\eta} \leq C'\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}$$

allora dalle stime della Proposizione **5.6.3**

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_{\mathrm{lim}}^4 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ g_{\mathrm{lim}}^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g_{\mathrm{lim}}^4 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right).$$

Da quanto appena scritto deduciamo

$$\delta_* = -\frac{2}{\Omega_0(s-2)}\left[(s-2)V - Q + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right] =$$

$$= -\frac{2}{\Omega_0(s-2)}\left[\left\langle g_{\mathrm{lim}} \left| \frac{\alpha^2(s-2)}{2}y^2 - g_{\mathrm{lim}}^2 \right| g_{\mathrm{lim}} \right\rangle + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right)\right].$$

Dato però che usando di nuovo la Proposizione **5.6.3** per stimare dal basso g_{lim} abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ \frac{\alpha^2(s-2)}{2} y^2 g_{\mathrm{lim}}^2 \geq \|g_{\mathrm{lim}}\|_4^4 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ \frac{\alpha^2(s-2)}{2} y^2 e^{-\frac{\alpha}{2}y^2} =$$

$$= (s-2)\sqrt{2\alpha\pi}\|g_{\mathrm{lim}}\|_4^4$$

e dunque

$$\delta_* \leq -\frac{2\|g_{\mathrm{lim}}\|_4^4}{\Omega_0(s-2)}\left[(s-2)\sqrt{2\alpha\pi} - \frac{1}{2\pi} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\eta^{\frac{7}{2}}\right)\right]$$

da cui la tesi.

□

5.8 Stime dall'alto per E^{GP}

Mostriamo ora l'*upper bound* per E^{GP}.

Dimostrazione del Teorema **4.1.5**. Come sopra l'idea è di usare una opportuna funzione test. Definiamo allora

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} Cg_*(y), & |y| \leq \eta, \\ Cg_*(\eta) r\left(\frac{y}{\eta}\right), & \eta \leq |y| \leq 2\eta, \\ 0, & |y| \geq 2\eta, \end{cases}$$

e successivamente

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\tilde{g}\left(\frac{x-1}{\varepsilon^2}\right)$$

con C tale che $\tilde{f} \in \mathcal{D}^{GP}$.

Stimiamo inizialmente il valore di C:

$$1 = \|\tilde{f}\|_2^2 = \|\tilde{g}\|_{L^2_\eta}^2 = C^2\left[1 + 2g_*^2(\eta)\int_\eta^{2\eta} \mathrm{d}y\ r\left(\frac{y}{\eta}\right)\right] =$$

$$= C^2\left[1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0}\eta\right)\right] \Rightarrow C^2 = 1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0}\eta\right).$$

Infine definiamo $\psi_T(\boldsymbol{x}) := \tilde{f}(x)e^{i(\Omega+\delta_*+\delta_\varepsilon)\theta}$ con δ_ε tale che

$$\Omega + \delta_* + \delta_\varepsilon = \lfloor\Omega + \delta_* + \delta_\varepsilon\rfloor = \lfloor\Omega + \delta_*\rfloor.$$

In particolare con questa definizione si ha che δ_ε è negativo. Definiamo ora

$$V(x) := \frac{1}{2}\left(1 - x^2 + \frac{\delta_* + \delta_\varepsilon}{\Omega}\right)^2\frac{1}{x^2} + \frac{x^s - 1}{s} - \frac{x^2-1}{2}.$$

In questo potenziale possiamo distinguere le parti direttamente dipendenti da δ_ε ed ottenere

$$V(x) = U_{\delta_*}(x) + \frac{\delta_\varepsilon}{2\Omega}\left(2(1-x^2) + \frac{2\delta_* + \delta_\varepsilon}{\Omega}\right)\frac{1}{x^2} = U_{\delta_*}(x) + U_\varepsilon(x).$$

A questo punto usiamo la nostra funzione test nel funzionale di Gross-Pitaevskii:

$$\mathcal{E}_\Omega^{GP}[\psi_T] := \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{2}[\nabla\tilde{f}]^2 + \Omega^2V(x)\tilde{f}^2 + \frac{1}{\varepsilon^4}\tilde{f}^4\right\} =$$

$$= 2\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\ x\ \left\{\frac{1}{2}[\tilde{f}']^2 + \Omega^2V(x)\tilde{f}^2 + \frac{1}{\varepsilon^4}\tilde{f}^4\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{-\varepsilon^{-2}}^{+\infty}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2y)\ \left\{\frac{1}{2}[\tilde{g}']^2 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}V(x)\tilde{g}^2 + \frac{1}{2\pi}\tilde{g}^4\right\}.$$

Dato che per ipotesi $-\frac{1}{\varepsilon^2} \leq -2\eta$ allora abbiamo

$$\mathcal{E}_\Omega^{GP}[\psi_T] = \frac{1}{\varepsilon^4}\left[\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2y)\ \left\{\frac{1}{2}|\tilde{g}'|^2 + \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4}V(x)\tilde{g}^2 + \frac{1}{2\pi}\tilde{g}^4\right\} + \right.$$

$$+ \int_{\eta\leq|y|\leq 2\eta}\mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2y)\left\{\frac{C^2g^2(\eta)}{2}|r'|^2 + \frac{C^2\Omega_0^2g^2(\eta)}{\varepsilon^4}V(x)r^2 + \right.$$

$$
+\frac{C^4 g^4(y)}{2\pi} r^4 \Bigg\}\Bigg] = \frac{1}{\varepsilon^4}\left[\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[\tilde{g}] + \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \frac{\Omega_0^2}{\varepsilon^4} U_\varepsilon(x)\tilde{g}^2 + \right.
$$

$$
+\int_{\eta\le|y|\le 2\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{C^2 g^2(\eta)}{2}|r'|^2 + \right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{C^2\Omega_0^2 g^2(\eta)}{\varepsilon^4} V(x) r^2 + \frac{C^4 g^4(y)}{2\pi} r^4\right\}\right].
$$

Ora il termine di "coda" si stima facilmente come

$$
\int_{\eta\le|y|\le 2\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{C^2 g^2(\eta)}{2}|r'|^2 + C^2 g^2(\eta) V(y) r^2 + \frac{C^4 g^4(y)}{2\pi} r^4\right\} \le
$$

$$
\le (1+\mathcal{O}(\varepsilon^2\eta)) C^2 g^2(\eta) \int_{\eta\le|y|\le 2\eta} \mathrm{d}y \left\{\frac{1}{2}\|r'\|_\infty^2 + \mathcal{O}(\eta^2)\|r\|_\infty^2 + \right.
$$

$$
\left. + \frac{C^2 g^2(y)}{2\pi}\|r\|_\infty^4\right\} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0}\eta^3\right)
$$

e dunque

$$
\mathcal{E}_\Omega^{GP}[\psi_T] = \frac{1}{\varepsilon^4}\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[\tilde{g}] + \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \Omega^2 U_\varepsilon(x)\tilde{g}^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0-4}\eta^3\right).
$$

Ora se chiamiamo $W_* := W_{\beta_*}$ allora il primo termine diviene

$$
\mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[\tilde{g}] = C^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \left\{\frac{1}{2}|g_*'|^2 + \left(W_*(y) + \varepsilon^2 u(y)\right) g_*^2 + \frac{C^2}{2\pi} g_*^4\right\} =
$$

$$
= C^2 \mathcal{E}_*^{\mathrm{gv}}[g_*] + (C^2 - 1)\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ g_*^4 = E_*^{\mathrm{gv}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0}\eta\right)\right)
$$

e dunque

$$
\mathcal{E}_\Omega^{GP}[\psi_T] = \frac{1}{\varepsilon^4} E_*^{\mathrm{gv}} + \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \Omega^2 U_\varepsilon(x)\tilde{g}^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta_0-4}\eta^3\right).
$$

Per il termine centrale facciamo uso delle stime su β_* e g_*, così otteniamo

$$
\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ (1+\varepsilon^2 y)\ \Omega^2 U_\varepsilon(x)\tilde{g}^2 = C^2 \int_{-\eta}^{\eta} (1+\varepsilon^2 y)\mathrm{d}y\ \Omega^2 U_\varepsilon(x) g_*^2 =
$$

$$
= C^2 \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{d}y\ \frac{\delta_\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2 y)}\ \left(2\Omega\left(1 - (1+\varepsilon^2 y)^2\right) + 2\delta_* + \delta_\varepsilon\right) g_*^2 =
$$

$$
= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{2\delta_* + \delta_\varepsilon - 2\Omega\varepsilon^2\left\langle g_* \left| \frac{y(2+\varepsilon^2 y)}{(1+\varepsilon^2 y)^2}\right| g_*\right\rangle_\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{2\delta_* + \delta_\varepsilon - 4\frac{\Omega_0}{\varepsilon^2}\left\langle g_* \left| \frac{y}{(1+\varepsilon^2 y)^2} \right| g_* \right\rangle_\eta - \frac{4\Omega_0}{\alpha^2}V + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{2\delta_* + \delta_\varepsilon + \frac{4\Omega_0}{\alpha^2\varepsilon^2}\left[-\alpha^2\beta_* + \varepsilon^2\left(\frac{\alpha^2 - 3\Omega_0^2}{\Omega_0^2}V - Q\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{2\delta_* + \delta_\varepsilon - \frac{8\Omega_0^2}{\alpha^2}\delta_* + \frac{4(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)}{\Omega_0\alpha^2}V - \frac{4\Omega_0}{\alpha^2}Q + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{\frac{2(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)}{\alpha^2}\delta_* + \delta_\varepsilon + \frac{4(\alpha^2 - 4\Omega_0^2)}{\Omega_0\alpha^2}V - \frac{4\Omega_0}{\alpha^2}Q + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{\frac{2(s-2)}{s+2}\delta_* + \delta_\varepsilon + \frac{4(s-2)}{\Omega_0(s+2)}V - \frac{4}{\Omega_0(s+2)}Q + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{\frac{2(s-2)}{s+2}\delta_* + \delta_\varepsilon + \frac{4}{\Omega_0(s+2)}\left[(s-2)V - Q\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left\{\frac{2(s-2)}{s+2}\delta_* + \delta_\varepsilon - \frac{2(s-2)}{s+2}\delta_* + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right\} = \\
&= \frac{C^2\delta_\varepsilon}{2}\left(\delta_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned}
$$

A questo punto

$$
\mathcal{E}_\Omega^{GP}[\psi_T] = \frac{1}{\varepsilon^4}E_*^{\mathrm{gv}} + \frac{\delta_\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)
$$

e dunque la tesi.

□

Questo lavoro non sarebbe stato possibile senza il continuo sostegno da parte della mia famiglia. Se oggi sono colui che sono e faccio quello che faccio è soprattutto grazie a loro.
Un ringraziamento particolare va inoltre a Federico ed Emanuela, i quali hanno dovuto conoscere la mia discontinua follia e ciononostante sono ancora qui per sopportarla.

Bibliografia

[ARVK] Abo-Shaeer, J.R., Raman, C., Vogels, J.M. e Ketterle, W., "Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates", *Science*, **292** (2001), 476-479.

[AS] Abramowitz, A. e Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications (1964).

[A] Aftalion, A., *Vortices in Bose-Einstein Condensates. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 34*, Birkhäuser, Boston (2006).

[AAB] Aftalion, A., Alama, S. e Bronsard, L., "Giant Vortex and the Breakdown of Strong Pinning in a Rotating Bose-Einstein Condensate", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **178** (2005), 247-286.

[AB] Aftalion, A. e Blanc, X., "Reduced energy functionals for a three dimensional fast rotating Bose-Einstein Condensate", *Annales de l'Institut Henri Poincare - Non Linear Analysis*, (2008), 339-355.

[ABD] Aftalion, A., Blanc, X. e Dalibard J., "Vortex Patterns in a Fast Rotating Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 23611.

[ABN] Aftalion, A., Blanc, X. e Nier, F., "Lowest Landau Level Functionals and Bargmann Spaces for Bose-Einstein Condensates", *J. Funct. Anal.*, **241** (2006), 661-702.

[AD] Aftalion, A. e Danaila ,I., "Giant vortices in combined harmonic and quartic traps", *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 33608.

[AJR] Aftalion, A., Jerrard, R. L. e Royo-Letelier, J,, "Non-existence of Vortices in the Small Density Region of a Condensate", *Journ. of Funct. An.*, **260** (2011), 2387-2406.

[A *et al.*] Anderson, M.H., Ensher, J.R., Matthews, M.R., Wieman, C.E. e Cornell E.A., "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science*, **269** (1995), 198-201.

[BJOS] Baldo, S., Jerrard, R.L., Orlandi, G. e Soner, H.M., "Vortex density models for superconductivity and superfluidity", *Commun. Math. Phys.*, **318** (2013), 131-171.

[B] Bose, S. N., "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Z. für Physik*, **26** (1924), 178–181.

[BR] Blanc, X. e Rougerie, N., "Lowest-Landau-level vortex structure of a Bose-Einstein condensate rotating in a harmonic plus quartic trap", *Phys. Rev.A*, **77** (2008), 53615.

[BSSD] Bretin, V., Stock, S., Seurin, S. e Dalibard, J., "Fast Rotation of a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004), 50403.

[BCPY] Bru, J.-B., Correggi, M., Pickl, P. e Yngvason J., "The TF Limit for Rapidly Rotating Bose Gases in Anharmonic Traps", *Commun. Math. Phys.*, **280** (2008), 517-544.

[CD] Castin, Y. e Dum R., "Bose-Einstein Condensates with Vortices in Rotating Traps", *Eur. Phys. J. D.*, **7** (1999), 399-412.

[CPRY1] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. e Yngvason J., "Critical Rotational Speeds in the Gross-Pitaevskii Theory on a Disc with Dirichlet Boundary Conditions", *J. Stat. Phys.*, **143** (2011), 261–305.

[CPRY2] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. e Yngvason, J., "Rotating Superfluids in Anharmonic Traps: From Vortex Lattices to Giant Vortices", *Phys. Rev. A*, **84** (2011), 053614.

[CPRY3] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. e Yngvason J., "Critical Rotational Speeds for Superfluids in Homogeneus Traps", *J. Math. Phys.*, **53** (2012), 95203.

[CPRY4] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. e Yngvason, J., "Giant vortex phase transition in rapidly rotating trapped Bose-Einstein condensates", *Eur. J. Phys. Special Topics*, **217** (2013), 183-188.

[CPRY5] Correggi, M., Pinsker, F., Rougerie, N. e Yngvason, J., "Vortex Phases of Rotating Superfluids", *J. Phys.: Conf. Ser.*, **414** (2013), 012034.

[CDY1] CORREGGI, M., RINDLER-DALLER, T. E YNGVASON, J., "Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in Strongly Anharmonic Traps", *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 042104.

[CDY2] CORREGGI, M., RINDLER-DALLER, T. E YNGVASON, J., "Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in Homogeneous Traps", *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 102103.

[CR] CORREGGI, M. E ROUGERIE, N., "On the Ginzburg-Landau Functional in the Surface Superconductivity Regime", *Commun. Math. Phys.*, **332** (2014), 1297-1343.

[CRY] CORREGGI, M., ROUGERIE, N. E YNGVASON J., "The transition to a Giant Vortec Phase in a Fast Rotating Bose-Einstein Condensate", *Commun. Math. Phys.*, **303** (2011), 451-608.

[CY] CORREGGI, M. E YNGVASON, J., "Energy and Vorticity in Fast Rotating Bose-Einstein Condensates", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** (2008), 445002.

[D] DANAILA, I., "Three-dimensional vortex structure of a fast rotating Bose-Einstein condensate with harmonic-plus-quartic confinement", *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 13605.

[DK] DANAILA, I. E KAZEMI, P., "A New Sobolev Gradient Method for Direct Minimization of the Gross–Pitaevskii Energy with Rotation", *SIAM J. Sci. Comput.*, **32** (2010), 2447–2467..

[D *et al.*] DAVIS, K.B., MEWES, M.O., ANDREWS, M.R., VAN DRUTEN, N.J., DURFEE, D.S., KURN, D.M. E KETTERLE W., "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 3969–3973.

[E] EINSTEIN, A., *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. (1924), 261-267 e (1925), 3-14.

[F1] FETTER, A. L., "Rotating vortex lattice in a Bose-Einstein condensate trapped in combined quadratic and quartic radial potentials", *Phys. Rev. A*, **64** (2001), 63608.

[F2] FETTER A.L., "Rotating Trapped Bose-Einstein Condensates", *Rev. Mod. Phys.*, **81** (2009), 647-691.

[FJS] FETTER, A. L., JACKSON, B. E STRINGARI, S., "Rapid rotation of a Bose-Einstein condensate in a harmonic plus quartic trap", *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 13605.

[FB] Fischer, U.R. e Baym, G., "Vortex States of Rapidly Rotating Dilute Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003), 140402.

[FZ] Fu, H. e Zaremba, E., "Transition to the giant vortex state in a harmonic-plus-quartic trap", *Phys. Rev. A*, **73** (2006), 13614.

[G1] Gross, E.P., "Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems", *Nuovo Cimento*, **20** (1961), 454-466.

[G2] Gross, E.P., "Hydrodynamics of a superfluid condensate", *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 195-207.

[IM1] Ignat, R. e Millot, V., "The Critical Velocity for Vortex Existence in a Two-dimensional Rotating Bose-Einstein Condensate", *J. Funct. Anal.*, **233** (2006), 260-306.

[IM2] Ignat, R. e Millot V., "Energy Expansion and Vortex Location for a Two Dimensional Rotating Bose-Einstein Condensate", *Rev. Math. Phys.*, **18** (2006), 119-162.

[JK] Jackson, A. D. e Kavoulakis, G. M., "Vortices and hysteresis in a rotating Bose-Einstein condensate with anharmonic confinement", *Phys. Rev. A*, **70** (2004), 23601.

[JKL] Jackson, A. D., Kavoulakis G. M. e Lundh, E., "Phase diagram of a rotating Bose-Einstein condensate with anharmonic confinement", *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 53619.

[KTU] Kasamatsu, K., Tsubota, M. e Ueda, M., "Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. A*, **66** (2002), 50606.

[KB] Kavoulakis, G. M. e Baym, G., "Rapidly rotating Bose-Einstein condensates in anharmonic potentials", *New Journ. Phys.*, **5** (2003), 51.1.

[KF] Kim, J. K. e Fetter, A. L., "Dynamics of a rapidly rotating Bose-Einstein condensate in a harmonic plus quartic trap", *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 23619.

[Le1] Leggett, A.J., "Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts", *Rev. Mod. Phys.*, **73** (2001), 307.

[Le2] Leggett, A.J., *Quantum Liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed matter systems*, Oxford University Press (2006).

[Lu] Lundh, E., "Multiply quantized vortices in trapped Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. A*, **65** (2002), 43604.

[LL] Lieb, E. H. e Loss, M., “Analysis Second Edition”, *Graduate Studies in Mathematics vol. 14*, American Mathematical Society (2000).

[LS] Lieb, E.H. e Seiringer, R., “Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for rotating Bose gases”, *Communications in Mathematical Physics*, **103** (2005).

[LSSY] Lieb, E. H., Seiringer, R., Solovej, J. P. e Yngvason J., “The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation”, *Oberwolfach Seminar Series, Vol. 34*, Birkhäuser, Boston (2005).

[LSY] Lieb, E.H., Seiringer, R. e Yngvason, J., “Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Energy Functional”, *Phys. Rev. A.*, **61** (2000), 43602.

[MCWD] Madison, K.W., Chevy, F., Wohlleben, W. e Dalibard, J., “Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 806-809.

[M *et al.*] Matthews, M.R., Anderson, B.P., Haljan, P.C., Hall, D.S., Wieman, C.E. e Cornell E.A., “Vortices in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.*, **83** (1999), 2498-2501.

[PSa] Pérez, E. e Sauer, T, “Einstein’s quantum theory of the monatomic ideal gas: non-statistical arguments for a new statistics”, *Arch. for History of Exact Sciences*, **64** (2010), Is.5, 561-612.

[PSm] Pethick, C. e Smith, H., *Bose-Einstein Condensation of Dilute Gases*, Cambridge University Press (2001).

[P] Pitaevskii, L.P., “Vortex lines in an imperfect Bose gas”, *Sov. Phys. JETP*, **13** (1961), 451-454.

[PSt] Pitaevskii, L. P. e Stringari,S., *Bose-Einstein Condensation*, Oxford Science Publications (2003).

[R *et al.*] Raman, C., Abo-Shaeer, J.R., Vogels, J.M., Xu, K. e Ketterle, W., “Vortex Nucleation in a Stirred Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 210402.

[R1] Rougerie, N.,, “The Giant Vortex State for a Bose-Einstein Condensate in a Rotating Anharmonic Trap: Extreme Rotation Regimes”, *J. Math. Pures Appl.*, **95** (2011), 296-347.

[R2] Rougerie, N., “Vortex Rings in a Fast Rotating Bose-Einstein Condensates”, *Arch. for Rat. Mech. and An.*, **203** (2012), Is.1, 69-135.

[S1] Seiringer, R., "Gross-Pitaevskii Theory of the Rotating Bose Gas", *Commun. Math. Phys.*, **229** (2002), 491-509.

[S2] Seiringer, R., "Ground state asymptotics of a dilute, rotating gas", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36** (2003), 9755-9778.

[SBCD] Stock, S., Bretin, V., Chevy, F. e Dalibard, J., "Shape oscillation of a rotating Bose-Einstein condensate", *Europhys. Lett.*, **65** (2004), 594.